مبادئ المنطق المعاصر



تأليف
ماري لويز رور

ترجمة
الدكتور محمود يعقوبي

دار الكتاب الحديث

مبادئ
المنطق المعاصر

مبادئ المنطق المعاصر

تأليف
ماري لويز رور

ترجمة
الدكتور محمود يعقوبي

دار الكتاب الحديث

تقديم

هذا كتاب صغير الحجم جم الفوائد وضعته مؤلفته لطلبة الفلسفة الذين لا يمكنهم أن يخوضوا في مشاكلها دون معرفة اللغة والوسائل التي يستعملها الفلاسفة؛ ولغة الفلاسفة ومصطلحاتهم التي لا تستقيم إلا بالتعريف الصحيح ووسائلهم هي أنواع الحجج التي يستعملها العقل البشري عبر اختلاف الأزمان والأماكن.

إنه كتاب أوجزت فيه المؤلفة أهم الأطوار التي مر بها المنطق الصوري منذ أن دون مسائله الأولى أرسطو باللغة الطبيعية، وإلى أن أصبح يستعمل لغة بشرية أخرى هي أدق وأشمل من اللغة الطبيعية.

و لعل أبرز ما يمتاز به هذا الكتاب هو التدرج البيداغوجي (التعليمي) ووضوح اللغة على الرغم من تشعبها وجدتها، والحرص على عرض المسائل المنطقية في مختلف أطوارها بمصطلحات تجعلها في متناول طالب المنطق الذي يدرسه في سياق استعماله لفهم مشاكل الفلسفة ومناقشتها.

و الذي ينفرد به هو بيان أن المنطق الحديث المتنامي الصور ليس سوى نتاج تمخض عنه المنطق الصوري القديم الذي ولد في مهد اللغة الطبيعية الضيق بضيقها والذي كان خطوة أولى ما كان للعقل البشري أن يتخطاها مثلما لا يمكن للكائن الحي أن يكون كهلا دون وقبل أن يكون طفلا.

إن قارئ هذا الكتاب يدرك أن مؤلفته قد خبرت المنطق القديم وعرفت مشاكله وحدوده، واطلعت على الطرح الحديث لهذه المشاكل التي اتسعت حدودها، وعملت على إزالة الشعور بالإحباط الذي ينشأ في الغالب لدى طالب الفلسفة الذي يخطو خطواته الأولى بدراسة المنطق في صورته القديمة ويظن أن المنطق الحديث عندما يتصدى لدراسته لا صلة له بالمنطق القديم الذي يبدو له أنه لم يعد يفيده في فهم هذا المنطق الحديث العام أو المناطق الحديثة الخاصة.

إن هذه الميزات التربوية والعلمية والتاريخية تطبع هذا الكتاب بطابع الأداة الجيدة التي أتقن صانعها صنعها لأداء وظيفتها على الوجه الأكمل بما يناسب الغرض منها وقدرات الذي يستعملها. فلا يستسهل المنطق ولا يستصعبه لا في صورته القديمة ولا في صورته الحديثة، بل يدرك علاقة أحدهما بالآخر وترابطهما العضوي الذي يتبين له منه أن المنطق نشاط فكري واحد ذو درجات متراوحة في الدقة وذو مجالات متفاوتة في الاتساع.

ولعل أهم ما ينبغي الانتباه إليه هو أن قارئ هذا الكتاب لا يمكن أن يفوته أن يدرك أن المنطق لم يعد أصحابه المحدثون يعدونه دراسة مغلقة منتهية ذات صورة واحدة ووحيدة. بل شأنه شأن جميع نشاطات العقل البشري الذي لا يمكن مسبقا أن يعرف الحدود التي سيقف عندها وأنواع المشاكل التي سيواجهها والطبيعة التي سيكون عليها. إذ ما دامت صور التفكير قد تنوعت وتعددت فإن طبائع الأشياء تقتضي أن يتواصل هذا التنوع وأن يستمر هذا التعدد. مادامت وسائل المعرفة تتزايد ويدقق بعضها بعضا دون أن يظهر حتى الآن ما يحول دون ذلك إما من قبل طبائع الأشياء أو إرادة مريد يعطي الأشياء طبائعها.

ألم يعد المنطق من هذه الزاوية هو العقل البشري الذي يطور نفسه بنفسه ويراقب نفسه بنفسه ويحدد نشاطه بنفسه ويحكم بنفسه على نفسه. وبماذا يمكنه أن يفعل ذلك إن لم يكن له مبادئ تفرض نفسها عليه ولا يستطيع أن يفلت منها كما يثبت ذلك تاريخ الفكر البشري الذي يحتفظ بهويته التي تنتقل معه عبر الزمان وعبر المكان. وعندئذ يحق لنا أن نتساءل ما الذي يتغير في المنطق قوانينه أم تطبيقاته؟ وجوهره أو أعراضه، هل العقل البشري هو الذي أوجد المنطق أم أنَّ المنطق هو الذي أوجد العقل البشري. أو لا يؤول هذا إلى القول هل العقل البشري هو الذي أوجد العقل البشري، وهل لهذا التساؤل من معنى؟

المترجم: أ.د. محمود اليعقوبي

مدخل

تعريفات تمهيدية

إن هذا الكتاب غرضه الجوهري هو تدريب القارئ غير المتخصص الذي هو في العادة طالب الفلسفة، على مناهج المنطق المعاصر، أي على تلك الصورة من المنطق التي توسعت منذ منتصف القرن التاسع عشر، والتي سميت على التوالي المنطق الرمزي، اللوجستيك، المنطق الرياضي، المنطق الصوري، إن هذه التسميات التي ليست كلها موفقة تؤكد كل واحدة منها على وجه خاص من وجوه المنطق المعاصر (استعمال الرموز، الحساب، الصورنة)، على حساب الوجوه الأخرى، ولهذا سنتحدث بشكل أعم عن المنطق الصوري.

ومن المسلم به أننا، في إطار هذا الكتاب لا نستوفي كل شيء، وأن عرضنا سيقتصر عمدا على أبسط عناصر هذا المنطق الذي عرف منذ بداية القرن [العشرين] توسعا كبيرا. ولا ريب أننا بتصرفنا هذا لا نستطيع أن نقدم للقارئ إلا فكرة غير دقيقة عن اتساع ميدانه وكذلك عن تعقيد المشاكل التي يتناولها في الآونة الراهنة. وللتخفيف من هذا العيب سنصدر عرضنا بباب نخصصه لتاريخ المنطق من أرسطو إلى يومنا هذا.

إن هذا العرض التاريخي سيمكننا من أن نؤكد، من جهة، أنه لا يوجد بين المنطق القديم[1] والمنطق المعاصر تعارض حقيقي خلافا لما زعمه بعض المؤلفين[2]، ومن جهة أخرى أن نبين أن المنطق القديم مهما كان كاملا منذ أن أسسه أرسطو لم يبق علما ميتا، و«منتهيا وتاما» حسب عبارة (كانط) Kant، بل عرف في العصر الوسيط توسعات أصيلة، وفي الأخير أن نبين أن المنطق المعاصر إن هو أطاح بعرش المنطق التقليدي، فقد كان ذلك لكي يستجيب بشكل أفضل للمثل الأعلى في الدقة والصورنة، الذي تطلبه المنطق القديم دون أن يحققه بشكل كامل.

(1) نقصد «بالمنطق القديم» المنطق الذي جاءنا من أرسطو وكما انتقل إلينا عبر العصر الوسيط وضم إليه بعضا من عناصر المنطق الرواقي، وسنستعمل أيضا بمعنى مماثل عبارة «المنطق التقليدي» و«المنطق الكلاسيكي».

(2) CF. entre autres, CARNAP, L'ancienne et la nouvelle logique, Actualités scientifiques et industrielles, N°76, PADOA, la logique déductive, Paris, 1912.

ومن أجل فهم أفضل لعرضنا التاريخي والنظري نعتقد أن من المفيد أن نقترح هاهنا بعض التعريفات وبعض الملاحظات التي تمكننا من أن نحيط بشكل أجود بميدان المنطق الصوري، ومن أن ندقق موضوع هذا الكتاب[1] إن هذه التعريفات التمهيدية التي لا يمكن أن تكون إلا عامة جدا، لا تدعي الإحاطة. لكنها على ما هي عليه ستقود خطانا في عملنا اللاحق الذي سيكون من مهامه بالضبط أن يجليها.

1 - المنطق الصوري

لقد اقترحت عدة تعريفات له منذ أرسطو، وكان القديس أوغسطين Saint Augustin يسميه (علم العلم)، وفي العصر الوسيط، كان الذين يرون أن المنطق هو ars rationalis (علم النظر) أو ars directiva ipsius rationis (الصناعة التي توجه عمل العقل ذاته)[2] أي أنه العلم الذي يدرس صحة التفكير العقلي، أي الخطاب في فعله الذاتي الذي هو المعرفة العلمية. وباختصار أكثر يمكن أن يقال إن المنطق هو العلم الذي يبين ما هي الصور الصحيحة للاستدلال.

2 - المادة والصورة. الصدق والصحة

في كل استدلال نحن نميز بين المادة والصورة: فالمادة أو المضمون هي الأشياء التي نتحدث عنها أو الخصائص التي نقولها عنها. والصورة أو البنية هي ما يتبقى في الاستدلال عندما نهمل المضمون.

في الاستدلال التقليدي:

«كل إنسان فان

وسقراط إنسان

إذن سقراط فان»

---

(1) Pour ces définitions, comme pour celles des termes techniques que nous employons, on se reportera utilement à R. Jolivet, vocabulaire de la philosophie 6ème ed. Lyon – paris, Emm. VITTE 1966.

(2) CF. THOMAS D'AQUIN. In Anal. Post, I, lect. I.

يمكننا أن نبرز الصورة بشكل أوضح بتعويض الحدود التي تعبر عن المادة، بالحروف أ، ب، ج، فنحصل على الصورة التالية للاستدلال:

«كل أ هي ب

و كل ج هي أ

إذن فكل ج هي ب»

التي يقال عنها إنها صحيحة (أو سليمة) أيا كانت الحدود التي تحل محل أ، ب، ج، أي بمقتضى بنيتها أو صورتها وحدها.

إن صحة أو فساد الاستدلال تتوقف على صورته فقط، فهي مستقلة عن مضمون القضايا التي يتكون منها، وبالتالي عن صدقها أو كذبها. فالقضايا يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة، لكن الاستدلال لا يمكن أن يكون إلا صحيحا أو فاسدا[1].

وبما أن موضوع المنطق هو تحديد الصور الصحيحة، والصور غير الصحيحة، فهو صوري بمقتضى التعريف نفسه، فيكون في عبارة «المنطق الصوري» حشو.

3 - المنطق الصوري والمنطق المادي

ومع ذلك إذا كان لعبارة «المنطق الصوري» معنى، فذاك لأن الناس قابلوا طويلا بين المنطق الصوري والمنطق المادي على أساس أن الأول يهمل كل مادة معينة، وأن الثاني يعمل حسابا في دراسته الصورية، لمختلف الأشياء العلمية التي يمكن أن ينطبق عليها الاستدلال كما هو الشأن في دراسة مختلف المناهج العلمية.

وقد كان العصر الوسيط يستعمل لهذا الغرض تسميتين أكثر توفيقا هما المنطق الأصغر والمنطق الأكبر. أما اليوم فإن المشاكل التي كان يعالجها هذا الأخير قد أحيلت إما إلى الابستومولوجيا وإما إلى مناهج العلوم[2].

---

(1) وبدلا من الحديث عن صحة الاستدلال نتحدث أيضا عن الصدق الصوري، الذي يقابله الصدق المادي في القضايا العينية.

(2) ينبغي عدم الخلط بين المنطق المادي أو علم المناهج بما يمكن أن يسمى المنطق التطبيقي. إن هذا ترجع إليه الأمثلة العينية التي توضح الصيغ المجردة في كتاب يتعذر فيه إيراد التمارين التطبيقية.

4 - المنطق الصوري والمنطق المصورن

لقد قلنا إنه يشار أحيانا إلى المنطق المعاصر باسم المنطق المصورن، Logique formalisée فما هو الفرق بين المنطق الصوري كما عرفناه منذ قليل وكما تصوره أرسطو والمنطقيون التقليديون، والمنطق المصورن كما يسمى؟ إن ما سنقوله عنه سيكون شديد الإجمال حتما، لكنه سيتضح ويتدقق قليلا بالعرض الذي سنقوم به في الأبواب التالية للمناهج الخاصة بالمنطق المعاصر.

فنقول بادئ ذي بدء هاهنا إن الصورنة في المنطق هي بشكل ما تحقيق لمطلب متضمن في مفهوم الصورة. والواقع أنها بالنسبة إلى علم أراد أن يكون دقيقا وعاما أكثر فأكثر، فقد كانت وسيلة إلى بلوغ مثلها الأعلى الصوري، أي لا إلى استبعاد كل حالة إلى مضمون الاستدلالات فحسب، بل كذلك كل لجوء إلى الحدس لتبريرها.

إن الصورنة المنطقية قد ارتبطت تاريخيا بالصورنة الرياضية، وقد تحققت المرحلة الأولى بالاستعمال المنهجي للرموز، وبالفعل فإن المنطق المعاصر قد وضع لنفسه لغة رمزية مكيفة بوجه خاص مع حاجاته، مستوحيا ذلك من علم الجبر، والحق يقال، فإن استعمال الترميز لم يجهله القدماء كل الجهل: فقد استعمل أرسطو حروفا، والرواقيون أعدادا ترتيبية، للإشارة إلى بعض الحدود أو إلى فئات من الحدود أرادوا تجاهل معناها أو محتواها لكي لا يروا فيها إلا وظيفتها المنطقية، لكن المنطقيين المعاصرين قد عمموها ومنهجوا استعمال الرمزية. لقد عمموها بمعنى أنهم طبقوها على كل عناصر الخطاب من مادة وصورة، أي على الحدود الشخصية أو التصورية، وعلى القضايا من حيث هي قضايا، وعلى العلاقات المنطقية ذاتها.

وهكذا فإن الحدود الشخصية مثل «سقراط» و «هذه الوردة» توضع مكانها متغيرات شيئية هي: س، ص، و. والحدود التصورية (أو الحملية بالمعنى العام) مثل «إنسان» و«فان» توضع مكانها متغيرات حملية هي: أ، ب، ج، والقضايا، كلما لم يكون لبنيتها الداخلية دخل، توضع مكانها متغيرات قضوية هي: ق، ل، م. وأما الروابط المنطقية التي تقوم فيها صورة الاستدلال أو الخطاب، فإنه يعبر عنها أيضا برموز تسمى في مقابل رموز المتغيرات التي سبقت الإشارة إليها، رموز الثوابت، أو كذلك الروابط والعوامل.

فتكون العبارة الرمزية للقضية «كل إنسان فان» هي إذن العبارة التالية: «لس(أس ⊂ب س)» التي تقرأ هكذا: بالنسبة إلى كل س، إذا كان س أ (أ = إنسان) فهو ب (ب= فان). إن هذه العبارة تحتوي على متغير شيئي هو «س» ومتغيرين حمليين «أ» و«ب» وعلى رمز الثابت الذي هو «⊂» الذي يسمى الاستلزام الذي يستعمل للإشارة إلى العلاقة الموجودة في هذا النمط من القضايا، بين متغيرين حمليين، وبعبارة أفضل، بين الشخصين اللذين يتصفان بالخاصيتين اللتين يشير إليهما المتغيران الحمليان. وأما الرمز «ل» فسنرى فيما بعد أنه يعبر عن التسوير.

وقد توحي العبارات السابقة أن المنطقيين المعاصرين لم يزيدوا على أن أحلوا محل رمزية هي التي تمثل الكلمات والجمل في اللغة العادية، رمزية أخرى قد تكون أخصر وأدق. لكن فائدتها تكون قليلة إن كانت فائدة عملية فقط. والواقع أن الترميز بالنسبة إلى المنطق المعاصر، هو الأداة اللازمة لصورنته. لكن من أجل هذا، فإنه لا يكفي أن يمتد الترميز إلى جميع حدود الخطاب: بل يجب بوجه خاص أن يكون ممنهجا systématisée أي موضوعا حسب قواعد دقيقة ومعبرا عنها بشكل صريح، بحيث لا يترك شيء للتحكم أو للحدس.

ويجب على هذه القواعد أن تذكر بالتحديد: (أ) الرموز المستعملة، (ب) كيفية تركيب بعضها مع بعض، (ج) التحويلات التي يمكن إجراؤها على تركيبات الرموز للحصول على تركيبات جديدة. وبهذا الشرط فقط، فإن نسق الرموز المتكون بهذا الشكل يمكن استعماله دون حاجة إلى الانشغال بمضمون الأقوال المطابقة لها ودون الرجوع إلى المعنى الحدسي الممكن الموجود في الثوابت المنطقية. ومن مفهوم الصورة المرتبطة باللغة العادية والتي تشاركها في عدم الدقة، نكون قد انتقلنا إلى مفهوم الصورانية formalisme التي تحدد لغة اصطناعية مثبتة بشكل دقيق ومتواطئ.

فالصورة التي تعبر عنها في اللغة العادية القضية «كل أ هو ب» يمكن أن تعني: «كل ما هو أ فإنه يتصف بالصفة ب»، أو «كل صنف أ متضمن في صنف ب»، أو كذلك: «كل ما هو أ مطابق لما هو ب». ومع صورانية المنطق المعاصر فإنه يمكن التمييز بين هذه المعاني

الثلاثة للرابطة الإسنادية «est» – وهناك غيرها – وتثبيتها بشكل متواطئ بالتعبير عن كل واحد منها برمز خاص».

ومما لا ريب فيه أن اللغة الجديدة يجب أن تسمح بالتعبير عن الصور المنطقية التقليدية – وسنرى أنها تفعل ذلك. لكن بما أنها ليست نسخًا في سجل آخر للغة العادية دون أن تكون أجنبية عنها مع ذلك، فهي تسمح بوضع صور جديدة بلا نهاية. وبهذا يمكننا أن نقول إن «المنطق الصوري» هو علم جميع الصور الممكنة للخطاب، بينما المنطق التقليدي لم يكن يدرس ولم يكن بإمكانه أن يدرس إلا الصور المستعملة بالفعل في الاستدلال العادي أو العلمي. وينبغي أن نضيف أنه انزوى تقريبا بشكل حصري في ميدان البنيات الحملية (من نمط «كذا هو كذا») كما نلاقيه في اللغة العادية وفي العلوم التصنيفية، وأنه لم يتوصل إلى وضع منطق العلاقات الذي طلبه توسع الرياضيات والعلوم.

5 – المنطق الفلسفي والمنطق الوضعي

إن المنطق القديم جعل نفسه علما فلسفيا: ومن هنا كان مكانه التقليدي في تعليم الفلسفة. أما المنطق المعاصر فإنه يريد أن يبني نفسه كعلم وضعي. ولننظر باختصار في ماذا يتمثل هذا الفرق؟

إن المنطق التقليدي منطق فلسفي بمعنى أنه يقيم أقواله في نهاية الأمر على مفاهيم ذات طابع فلسفي، ولا سيما على بداهة مبدأ عدم التناقض. وهو كذلك أيضا لأنه ينتهج في دراسة موضوعه، منهجا ليس سوى منهج التحليل النظري المستعمل في الميتافيزياء. فهو إنما يحدد بالفعل قوانين الاستدلال بتحليل الوقائع الفكرية كما تتمثل في التجربة المباشرة، وهو يفعل ذلك بالاستناد إلى تصور معين لطبيعة المعرفة وقيمتها[1].

إن المنطق المعاصر، لا سيما منذ مستهل القرن (العشرين) قد تخلص من كل مفترض فلسفي، بتبني منهج وضعي صريح، أي المنهج المصورن على الصورة التي قدمنا

(1) ينبغي أن نؤكد أن أرسطو في مؤلفاته المنطقية الخالصة (لا سيما التحليلات الأولى) لا يرجع أبدا إلى مفهوم ذي طابع فلسفي (ما عدا مفهوم البداهة من أجل تعريف القياس الكامل)، وأن نظريته في القياس مبنية بطريقة مستقلة عن كل افتراض فلسفي. فالاستاجيري مع اعتباره أن المنطق لا يفسر نفسه بنفسه يعرف جيدا كيف يفصل بين البناء المنطقي الخالص وأساسه الميتافيزيائي.

عنها فكرة أولى فيما سبق. إن المنطق - وينبغي أن نقول إن مختلف الأنساق المنطقية، فلقد تكاثرت منذ حوالي أربعين سنة- يستطيع أن يبني نفسه ابتداء من بعض المفاهيم البسيطة جدا (هي مفهوم القضية والصدق والكذب واللزوم) دون لجوء إلى بداهات ذات طابع عقلي.

وهذا وبعد أن وضع لنفسه لغة خاصة يتكون منها موضوعه، فهو يقيم نظامه، على غرار الرياضيات، في صورة نسق استنتاجي قائم كله على مصادرات. ولهذا الغرض فنحن نضع في البداية بعض القضايا الأولية (كبديهيات) نستخلص منها، بواسطة قواعد (هي قواعد استنتاج) يجب أن تدقق تماما اتقاء لكل لبس، قضايا أخرى تتكون منها مبرهنات النسق وقوانينه، وكل من البديهيات والقواعد إنما تختار لا حسب بداهتها (وكيف يصح الحديث عن «البداهة» عندما يتعلق الأمر بصيغ مفرغة من مضمونها بواسطة الترميز؟) بل تبعا للنسق المراد وضعه بحيث لا يفضي هذا النسق أبدا إلى عبارات أو صيغ متناقضة.

والبديهيات المذكورة في رمزية النسق، ينبغي أن لا تذكر إلا علاقات منطقية بسيطة بين موضوعات اللغة، وليس لهذه العلاقات خصائص أخرى غير الخصائص المشتقة من بديهيات النسق وتعريفاته، ومن جهة أخرى لا يمكن إدخال مفهوم آخر اللهم إلا إن سبق تعريفه بواسطة المفاهيم المذكورة في البديهيات.

وفي مثل هذا السياق فلا حاجة إلى اللجوء إلى مقاييس ذات طبيعة فلسفية (مثل المبادئ الأولى والبداهة العقلية) من أجل الحكم على صحة قول من الأقوال: بل يكفي التحقق من أنه تم الحصول عليه وفقا للقواعد الموضوعة للنسق. وهكذا في التصور الجزمي - الاستنتاجي الذي كان هو تصور أوائل المنطقيين الرمزيين المحدثين، وقع الانتقال إلى التصور الفرضي الاستنتاجي الذي هو اليوم تصور جميع العلوم.

فالمنطق المعاصر يستحق، بفضل الصورنة والبناء المصادرياتي axiomatisation لقب العلم الوضعي إن نحن قصدنا بهذا أنه لا يلتفت من أجل بنائه وتوسعه، إلى أي افتراض فلسفي، وأن أقواله المفرغة من مضمونها باستعمال المتغيرات لا تقول شيئا عن

الواقع. لقد قال (فتغنشتاين) Wittgenstein ولو بطريقة متضاربة نوعا ما: «جميع قضايا المنطق تقول نفس الشيء، أي لا شيئا»[1].

ومع ذلك نضيف أنه إن كان صحيحا أن المنطق المعاصر قد توصل إلى أن يبني نفسه بناء مستقلا عن كل فلسفة، فإن هناك سؤالا يطرح نفسه لمعرفة ما إن كان لا ينتهي حتما إلى مشاكل ذات طبيعة فلسفية. إننا لا نريد ههنا على طرح السؤال، لكننا نعتقد أنه ينبغي أن يطرح وأن الفلاسفة لا يستطيعون أن يجيبوا عليه إلا أنهم قبلوا الاطلاع على مناهج المنطق المعاصر وعلى نتائجه الرئيسية.

(1) وعندئذ ندرك أننا في أثناء هذا المؤلف الموضوع في المنطق الصوري، لا يلزمنا أن نتحدث ولو عن طريق الإشارة عن «مناطق» كانط وهيغل وهوسرك، التي ليست هي مناطق بالمعنى الذي نقصده لا من حيث الموضوع ولا من حيث المنهج.

الباب الأول

من منطق أرسطو إلى الصورنة المعاصرة

يرى (كانط) Kant أن المنطق ليس له تاريخ «لكونه قد خرج تاما من دماغ أرسطو»[1] و(برانتل) Prantl من جهته، مع أنه قد خصص للعصر الوسيط جزأين من أربعة أجزاء من كتابه Geschichte der logik in Abendlande [تاريخ المنطق في الغرب] رأى أنه لا يوجد إلا منطقي واحد هو أرسطو، وأن خلفه لم يزيدوا على تكرار ما قاله أو على تحريفه، وأعمال المنطقيين الرمزيين هي التي بشكل غريب أعادت الاعتبار لتاريخ المنطق: فبعضهم أماط اللثام عن أصالة منطق الرواقيين حيال منطق الاستاغيري[2] وبعضهم الآخر الذين ما يزالون قليلين في الحقيقة قد بينوا أن العصر الوسيط قد قدم للمنطق مساهمة لا ينبغي إهمالها[3].

وعلى الرغم من أن الدراسات المنجزة حتى الآن ما تزال قليلة جدا لكي نتمكن من أن نكوّن فكرة دقيقة عن تطور المنطق وعن الأصالة التي طبعته في مختلف العصور، فإنه يمكن الجزم منذ الآن بأن للمنطق تاريخا، وعلى الإجمال تميز ثلاث فترات رئيسية: العصر القديم وهو من أرسطو إلى نهاية الرواقية، والعصر الوسيط من القرن الثالث عشر إلى القرن الخامس عشر، وأخيرا الفترة المعاصرة والتي يمكن اعتبارها تبدأ من منتصف القرن التاسع عشر. وبين نهاية القرن القديم والعصر الوسيط الأول، وبين أواخر العصر الوسيط وأوائل المنطقيين المحدثين (من دي مرغن de MORGAN وبول BOOLE) توجد فترات انحطاط أو ركود.

---

(1) Critique de la raison pure, Préface de la 2ème éd. Barni, P17.

(2) CF, entre autres, H. SCHOLZ, Geschichte der Logik, Berlin, 1931, J. LUKASIEWICZ, ZUR GESCHICHTE der Aussagenlogik, Erkenntnis, T.V. 1935.

(3) CF, PH. BOEHNER, Medieval Logic, Manchester, 1952 ; BOCHENSKI, Formale Logik, Fribourg – Munich, 1956 ; MOODY, Truth and consequence in Mediaeval Logic, Amesterdam, 1953.

إن المنطق الكلاسيكي – الذي نجده في جميع كتب المنطق ابتداء من القرن السابع عشر – ليس على وجه الضبط منطق أرسطو ولا منطق المدرسيين. وهو لا يحتفظ إلا ببعض الجوانب من المذاهب القديمة والوسيطية التي كانت أغنى وأكثر تنوعا مما تظهره الكتب الكلاسيكية.

I - العصر القديم

1 - اسلاف ارسطو

إن أرسطو هو، بلا منازع وباعترافه[1] مبدع المنطق كمبحث علمي، بمعنى أنه أول من استخلص ودرس لذاته القوانين المنطقية المتضمنة في الاستدلال، لكن بعضا من أسلافه إن لم يشقوا له الطريق، فهم على الأقل قدموا له عناصر البحث لإعداد عمله المنطقي.

ومنهم في أول الأمر أوائل الرياضيين اليونانيين -طاليس الملطي (640 - 546) وفيثاغورس (570 - 496)- اللذان تستعمل براهينهما الدقيقة عددا من القوانين أو القواعد المنطقية دون أن يقع التصريح بها أو التعرف عليها لذاتها، والجدليون والسوفسطائيون (و من بينهم زينون الإيلي) الذين كانوا يستعملون بمهارة وبراعة، المحاجة بالمحال، يكونوا بعيدين عن استشفاف واستخراج آلية هذا الاستدلال الذي استعمله أرسطو استعمالا واسعا في نظريته القياسية، وفي الأخير أفلاطون، ولو أنه لم يكن له منطق لفلسفته قد ساهم في ظهور عمل أرسطو بعدة كيفيات. وبالفعل فإن طريقة التقسيم التي تميز الجدل الأفلاطوني في بحثه عن الماهية (أو التعريف الأفضل) تجري وفقا لعلاقة (إدراج وإخراج) التصورات التي ستكون هي طريقة أرسطو. وبالإضافة إلى هذا فإن هذه الطريقة وباعتراف الاستاجيري نفسه قد كانت هي المرقاة التي ارتقى بها إلى القياس الحقيقي أي البرهاني، بينما التقسيم عند أستاذه والذي سماه «قياسا عاجزا»[2] هو محاجة غير برهانية، لأن النتيجة لا تتأتى من المقدمتين وحدهما. وبالفعل فإن «التقسيم» الأفلاطوني ينطلق من تصور عام جدا، وبالتصنيفات المتتالية التي يعقبها حذف في كل مرة، تتوصل إلى مزيد من التحديد للشيء المراد تعريفه. لكن في كل حذف يقع اللجوء إلى الحدس أو إلى التجربة بحيث لا تتقدم المحاجة ولا يقع الانتقال من المقدمتين إلى النتيجة إلا باختيار خارج عن المنطق[3].

---

(1) CF. de Sophisticis Elenchis, 34, 184a, 9 sv.

(2) CF. Premiers analytiques, I, 31, 46a, 30 – 35.

(3) CF. les définitions du pêcheur à la ligne, Sophiste, 218 e-221a, de la politique, politique, 258e sv. etc.

وإذا أضفنا أن أفلاطون بإدخاله في التفكير الفلسفي فكرة القانون الكلي والضروري قد مكّن المنطق اليوناني من الارتقاء في ظرف جيل واحد، إلى صعيد العموم الذي هو صعيد العلم، فإننا ندرك مدى تأثيره على نشأة العلم المنطقي وتطوره.

2 - ارسطو

إن المنطق مع أفلاطون قد بقي متعلقا بالجدل، وإن صح القول بقي مندمجا فيه. لكنه مع أرسطو اكتسب استقلاله وأصبح بحثا علميا له موضوعه الخاص. وإن كان ما يزال مرتبطا بالفلسفة، فذاك فقط وكما قلنا قبل هذا، لأنه في نظر أرسطو لا يفسر نفسه بنفسه وهو يتطلب بيان أساسه.

أ - نتاج أرسطو المنطقي الذي في القرن الأول من تاريخنا [المسيحي] والذي أطلق عليه أتباعه العنوان العام وهو الأورغانون (أي الأداة) يضم ستة كتب. فكتاب المقولات يحلل أهم حدود الخطاب، أي التي تنضوي تحتها كل الحدود الأخرى، وكتاب العبارة يدرس القضية ومختلف أنواعها. والتحليلات الأولى تحدد الأقيسة الصحيحة، والتحليلات الثانية تدرس فيما تدرس البرهان - ونسميها اليوم نظرية الاستنتاج. والمواضع مخصصة للحجج المحتملة أو المقبولة المستعملة في النقاش الجدلي، وأخيرا التفنيدات السوفسطائية تنظر في الاستدلالات الفاسدة إما من جهة صورتها أو من جهة مادتها.

ب- وإذا تعلق الأمر الآن بضبط خصائص المنطق الأرسطي قلنا يمكننا أن نعرفه بأنه منطق الحدود، بمعنى أنه يدرس الاستدلالات التي تنجم من ترابط الحدود أو التصورات. وبالفعل فإن الحدود إذا ما أخذناها من جهة المفهوم أمكن أن تكون متداخلة أو متباينة، وإذا ما أخذناها من جهة الماصدق أمكن أو لم يمكن أن يحتوي بعضها بعضا: ومن هنا أمكن بتركيب بعضها مع بعض أن نحصل على استدلالات صحيحة أو فاسدة.

إن أرسطو، وعلى الأقل في تحليلاته الأولى التي تتضمن نظرية القياس قد مال أكثر إلى وجهة النظر الماصدقية، ولو كان يرى أن المفهوم هو الذي يؤسس ما صدق الحدود. وهكذا فهو يعرف القياس الكامل، أي الواضح بنفسه بهذه الطريقة: «عندما تكون ثلاثة

حدود بعضها بالنسبة إلى بعضها الآخر، بحيث يكون الأصغر (الحد الأصغر) محتوى في كل الأوسط/ والأوسط في كل الأكبر (الحد الأكبر)فإنه يكون بالضرورة بين الطرفين قياس كامل»[1]

«إذا كانت أ منتمية لكل ب

وإذا كانت ب منتمية لكل ج

فإن أ تكون منتمية لكل ج»

ولسنا نريد أن نعرض هاهنا نظرية أرسطو القياسية، بل نريد فقط في إطار هذا الكتاب الموضوع في المنطق الصوري المعاصر، أن نبين أهم خصائصه. وفي هذا الصدد يجب بادئ ذي بدء أن نقول إن له طابعا صوريا عاليا، بفضل استعمال الرموز «α»، «β»، «γ» (التي لها قيمة المتغيرات) التي تنوب مناب أي حد تصوري، ما عدا الحدود التي لا تصدق على أي شيء (=الصنف الفارغ) أو التي تصدق على كل شيء (= الصنف التام). ومما لا شك فيه أن أرسطو لم يدرك كل ما يمكن استفادته من المتغيرات، لكنه أول من فكر في استعمالها لإبراز صورة القياس ويغض النظر كليا عن معنى الحدود التصورية.

ثم إن نظرية القياس الأرسطية تشكل نظرية محكمة الدقة[2] وإذا كانت لا تظهر بمظهر مصادرياتي – بالمعنى الذي نقصده اليوم- فهي مع ذلك تكتسي طابعا نسقيا واستنتاجيا بارزا. وبالفعل وبعدما حدد أرسطو ما يعنيه «بالقياس الكامل» أو «البين» فإنه بين كيف تستجيب الضروب الأربعة من الشكل الأول لهذا التحديد (كم كم كم – كس كم كس– كم جم جم – كس جم جس) ثم وبالاستناد إليها حدد صحة ضروب الأشكال الأخرى بواسطة بعض القوانين التي منها العكس والتداخل والتي سبق له أن بينها[3].

(1) CF. Premiers analytiques, I, 4, 25b, 30-35 (Trad. TRICOT ; Organon, III, Paris, Vrin, 1936, P.13).

(2) يرى لوكاشيفيش في كتابه (Aristotle's Syllogistic, P.131) أن دقة نظرية القياس الأرسطية تساوي بل تتجاوز دقة النظرية الرياضية.

(3) بعد ما أدرك أرسطو بعد ذلك أنه يمكن أن نبرهن بالخلف الضربين (كم جم جم) و(كس جم جس) من الشكل الأول لاحظ أنه يمكن بناء نظرية القياس كلها ابتداء من الضربين (كم كم كم)

إن هذا النسق من وجهة النظر الحديثة فيه بعض النقائص: فالبديهيات أو ما يقوم مقامها ليست مذكورة بصراحة في المنطق، لا هي ولا جميع القواعد المستعملة في البرهنة، بل وقع اللجوء إلى الحدس، أي إلى التجربة لإلغاء الأقيسة الفاسدة. لكن هذا النسق في ذاته جدير لدقته، بالإعجاب الذي ما فتئ يثيره خلال القرون. وأكثر عيوبه يتمثل في ضيقه. وبالفعل، فإن أرسطو من جهة، لم يدرس منطق القضايا الذي تتضمنه مع ذلك نظريته في القياس[1]، لأنه إذا كان كل قياس يقوم على ترابط بين تصورات، فهو يقوم بشكل أشد، على استلزام للقضايا التي تذكر فيها العلاقات بين التصورات، «إذا (ق) و(ل) فـ(م)». ومن جهة أخرى فإن أرسطو قد اقتصر في نسقه على ميدان القضايا العامة الحملية، ولم يعمل حسابا للقضايا الشخصية ولا لخصوصية وتنوع القضايا العلاقية. ومن هنا جاء أن نظريته القياسية حتى مع الإضافات التي أضافها العصر الوسيط، لا تسمح بتوضيح جميع الصور الاستدلالية ولا سيما الاستدلالات الرياضية.

3 - الرواقيون

إن مؤرخي الفلسفة، في تاريخ قريب نسبيا قد اعتبروا منطق الرواقيين إما تقليدا عقيما، وإما تشويها لمنطق أرسطو[2]. وفي نهاية القرن التاسع عشر، كان (بروشارد) Brochard من أوائل الذين اعترضوا على مثل هذه الأحكام[3]. ومنذ ذلك الحين أظهرت عدة أبحاث الدور الأساسي التي قامت به المدرسة الرواقية، وبالضبط المدرسة الميغارية الرواقية في تطور المنطق.

و(كس كم كس) وحدها.

(1) ومع ذلك فقد استعمل الاستدلال بالخلف الذي ينتمي إلى منطق القضايا، بل يذكر بعبارة صريحة في تحليلاته الأولى بعض القوانين التي تتعلق بهذا القسم من المنطق (CF I, 32, 47a 28sv., II, 8, 59b 3 sv).

(2) هذا رأي PRANTL (OP. cit., t. I, P.408, sv) ورأي FRANK (Esquise d'une histoire de la logique) ولرفع اللوم عن هؤلاء المؤرخين يجب أن نقول إننا لا نعرف منطق الرواقيين إلا من خلال نبذ، بينما وصلنا منطق أرسطو منذ القرن الثاني عشر بجملته الضخمة.

(3) CF. BROCHARD, la logique des stoïciens, Etudes de philosophie ancienne, 1912.

أ – موضوع المنطق الرواقي:

فبينما منطق أرسطو هو في جوهره منطق حدود فإن منطق الرواقيين منطق قضايا، وبعبارة دقيقة منطق ترابط القضايا باعتبار الواحدة منها كلا بغض النظر عن مضمونها. فالمتغيرات التي هي حروف الأبجدية التي تقوم مقام الحدود التصورية أيا كانت، في المنطق الأول، فهي في المنطق الثاني بوجه عام أرقام ترتيبية تشير إلى قضايا كما هو واضح في المثال التالي:

«إذا الأول، فالثاني

لكن الأول

إذن فالثاني»

الذي أعطاه الرواقيون أنفسهم هذا التأويل:

«عندما يكون النهار موجودا يكون الضياء موجودا

لكن النهار موجود

إذن فالضياء موجود»

إن علاقات القضايا التي درسها الرواقيون هي ثلاث علاقات: (1) العلاقة الشرطية التي يعبر عنها الثابت المنطقي «إذا» والتي نسميها اليوم الاستلزام، (2) علاقة العطف التي تعبر عنها «و»، (3) علاقة الفصل التي تعبر عنها «أو».

إن طبيعة هذه العلاقات المختلفة كانت موضوعا لمناقشات حادة عند الرواقين، لا سيما العلاقات الشرطية التي اقترحوا لها على الأقل أربعة تعريفات مختلفة. وأكثرها قبولا في العادة هو تعريف (فيلون الميغاري) الذي يطابق ما نسميه اليوم الاستلزام المادي: «تكون الشرطية صادقة إلا إن كان المقدم صادقا والتالي كاذبا»، ولتوضيح هذه العلاقة، كان الرواقيون حسب قول (سكتوس) يستعملون جداول أعاد المنطقيون المعاصرون استعمالها باسم «جداول الدوال الصدقية» أو باختصار «جداول الصدق»، هذا مثال لها:

جدول الاستلزام

(ص وك تشيران إلى إمكان أن تكون القضية صادقة (ص) أو كاذبة (ك)

	ق	ص	ص	ك	ك
	ل	ص	ك	ص	ك
ق تستلزم	ل	ص	ك	ص	ص

إن السطر الثالث من هذا الجدول يشير إلى أن القضية الشرطية (أو الاستلزام) تعتبر صادقة في الحالات 1 و3 و4، وكاذبة في الحالة 2 أي إذا كان المقدم صادقا والتالي كاذبا. وهذا يؤول إلى القول إن القضية الشرطية الرواقية لا تعبر عن شيء آخر غير العلاقة الفعلية بين قولين من حيث الصدق أو الكذب.

لقد نسب الفرق بين المنطق الأرسطي والمنطق الرواقي لمدة طويلة إلى فرق مطابق لما يتعلق بنظرية المعرفة، وكان هذا الفرق يشعر به الناس في العصر القديم كما لو كان تعارضا، ومهما يكن أمر هذه النقطة التاريخية فقد اتضح اليوم أنه لا تعارض بين منطق الحدود ومنطق القضايا اللذين يتكون منهما قسمان من المنطق كلاهما جوهري. وعلى كل حال فإن للرواقيين الفضل في وضع أهم القسمين: وبالفعل فإن منطق القضايا هو الأساس اللازم لصرح المنطق كله.

ب- خصائص المنطق الرواقي:

إن الرواقيين، بانطلاقهم من الصلات المنطقية الموجودة في الاستلزام والعطف، قد شيدوا بموازاة نظرية القياس الأرسطية إن صح التعبير، نظرية في القياس سميت افتراضية، بمعنى أن إحدى مقدمتي الأقيسة هي دائما مقدمة افتراضية بالمعنى الواسع، أي شرطية متصلة أو شرطية منفصلة أو عطفية[1].

(1) لقد وجد الناس في استبدال الأقيسة الافتراضية بالأقيسة الجزمية تغيرا في المنظور الميتافزيائي، أي استبدال فكرة القانون (أي من الشرط إلى المشروط) بمفهومي الجوهر والماهية اللذين كانا أساسا للنسق الأرسطي.

إن منطق الرواقيين إذا حكمنا عليه من خلال النبذ التي وصلتنا منه، قد اكتسى منذ نشأته صورة قريبة جدا من الصورة التي تبناها المنطقيون المعاصرون: فيمكن أن نقول إنه يمثل أول نسق للمنطق المصادرياتي axiomatique قبل اكتماله. وبالفعل فإن الرواقيين يضعون باديء ذي بدء خمسة ضروب من الاستدلالات يسمونها «لا مبرهنات» ونسميها اليوم «بديهيات»[1]. وكل الضروب المشتقة تبرهن بعد ذلك بواسطة أحد هذه «اللا مبرهنات» الخمس. وفيما يلي نعرض اللامبرهنات الخمس الرواقية مستعملين كمتغيرات قضوية، الحروف المستعملة حاليا، بدلا من الأرقام الترتيبية (ق، ل،....تمثلان أي قضية من القضايا):

1- من المقرر أن: ق تستلزم ل
و لدينا ق

إذن لدينا: ل

2- من المقرر أن: ق تستلزم ل
و لدينا نفي ل

إذن لدينا: نفي ق

3- من المقرر أن: ق أو ل
و لدينا ق

إذن لدينا: نفي ل

4- من المقرر أن: ق أو ل
و لدينا نفي ل[3]

إذن لدينا: ق

5- من المقرر: نفي (ق و ل)
و لدينا ق

إذن لدينا نفي ل

(1) DIOCLES MAGNES, apud DIOG. LAERT, VII, 79 (ARMIN, II, 241).

(2) إذا أخذنا في حسابنا الأمبرهنين (3، 4) فإن معنى الفصل (أو) هو معنى العناد، والمقصود بها هو aut اللاتينية، (إما ... وإما ....).

وعلى سبيل المثال نشير باختصار إلى الكيفية التي يبرهن بها الرواقيون الضروب المشتقة، فإن أردنا أن نبرهن:

«إذا ثبت لدينا (ق) و(ل) معا ثبت لدينا (م) (المقدمة الأولى)

لكن لم تثبت لدينا (م) (المقدمة الثانية)

و قد ثبت لدينا (ق) (المقدمة الثالثة)

إذن لم تثبت لدينا (ل) (النتيجة)

فمن المقدمة الأولى، معتبرين «(ق) و(ل)» جملة واحدة، ومن الثانية، وبواسطة اللامبرهنة 2 نستنتج «نفي ((ق) و(ل))». ومن «نفي ((ق) و(ل))» ومن المقدمة الثالثة وبواسطة اللامبرهنة 5، نستنتج «نفي ل» الذي أردنا برهنته».

ج- قاعدة استنتاجية. الاستلزام (أو القانون المنطقي):

إن اللامبرهنات الرواقية الخمس، وكذلك الضروب المشتقة منها، ذكرت في صورة خطاطات تطابق ما يسمى اليوم قواعد استنباطية (أو خطاطات استنتاجية)، بينما الأقيسة الأرسطية تكتسي صورة استلزام (أو قانون). والفرق بينهما مهم، على الرغم من سهولة الانتقال من أحدهما إلى الآخر. ولهذا نعتقد أن من المفيد أن نقدم بعض التوضيحات حول ذلك.

إن القياس الأرسطي استلزام من النمط التالي: «إذا (ق) و(ل)، إذن (م)» أو بشكل أوضح «إذا كانت (أ) تنتمي إلى كل (ب)، وكانت (ب) تنتمي إلى كل (ج)، فإن (أ) تنتمي إلى كل (ج)». إن صيغة الاستلزام عندما نعوض فيها المتغيرات بحدود مناسبة، تعطي قضية مركبة وحيدة يمكن أن نقول عنها إنها صادقة أو كاذبة: والضرب [كل - كل- كل] Barbara كما ذكر قبل هذا يصبح قضية صادقة بالنسبة إلى جميع القيم الممكنة للمتغيرات. ومثل هذه الاستلزامات الصادقة بالنسبة إلى جميع قيم المتغيرات (مع اعتبار مجال التغير)، تسمى في المنطق المعاصر أطروحات Thèses أو قوانين منطقية أو مصدقات Tautologie.

والقياس الرواقي، على الرغم من أنه يتكون مثل القياس الأرسطي، من مقدمتين ومن نتيجة، لا يعطي، عندما نغير المتغيرات بقضايا، قضية جديدة وحيدة، بل سلسلة منطقية من القضايا تربط بعضها إلى بعض الأداة إذن donc، أي استدلالا (أو استنتاجا) لا يمكن إلا أن يكون صحيحا أو فاسدا، إن الخطاطة المجردة التي تطابق استدلالا من هذا النوع، هي قاعدة استنتاج، يمكن التعبير عنها كما يلي: « من سلم بصدق مقدمات معينة لزمه التسليم أيضا بصدق نتيجة معينة». والمطة الأفقية التي في صياغة اللامبرهنات الرواقية وضعناها تحت المقدمتين، ينبغي فهمها على أنها رمز القاعدة التي تجيز النتيجة»[1].

إن الفرق بين القانون أو الأطروحة المنطقية، والقاعدة الاستنتاجية، هو بوجه خاص فرق ذو طبيعة نظرية: فالقانون المنطقي قول من أقوال النسق، فهو ينتمي إليه بوجه خاص ومعبر عنه بلغته، وأما القاعدة الاستنتاجية فهي تشير إلى كيفية العمل لبناء الاستدلال الصحيح المطابق لقانون منطقي: فهي خارجة عن النسق ويقع التعبير عنها بلغته الشارحة. ومع ذلك من الناحية العملية، فإننا ننتقل من أحدهما إلى الآخر من دون صعوبة، إذ كل قانون توافقه قاعدة تطابقه، وكل قاعدة تستند إلى قانون يؤسسها.

إن المنطق المعاصر ينطق في أغلب الأحيان بلغة الاستلزام أو القوانين، ومع ذلك ومن حوالي ثلاثين سنة، فإن العديد من المنطقيين قد تبنوا في أعقاب (غنتسن) GENTZEN [2] منهجا يعمل حسب قواعد (أو خطاطات استنتاج). سنقدم عنها عرضا في الأبواب التالية.

II - العصر الوسيط

ومع الرواقيين تنتهي بالنسبة إلى المنطق الصوري، فترة من الإبداع الكثيف، وكما هو الشأن في مثل هذه الحالة، فإن الأساتذة يخلفهم عندئذ الشراح. وسنقتصر على ذكر بعض الأسماء. فكان هناك في أول الأمر تلميذ أرسطو، (ثاوفراستس) الذي دقق مؤلفات أستاذه تدقيقا مفيدا. ثم كان أيضا (الإسكندر الأفروديسي) (القرن الثالث بعد الميلاد) أحد أفضل شراح المنطق الأرسطي الذي قدم عنه أول نسقية له. ويجب أن نذكر أيضا

(1) كان الرواقيون يعرفون ويميزون تماما الصورتين الاستنتاجية والاستلزامية.

(2) G. GENTZEN, Recherches sur la déduction logique, Tr. Fr. Paris, PUF, 1955.

(فرفوريوس) (233 - 304) بمدخله Isagogé الذي كان في العصر الوسيط يشرح كما يشرح الأورغانون، و(بويسيوس) Boèce (470 - 525) الذي كانت شروحه ومدخله إلى الأقيسة الحملية والأقيسة الاستثنائية، ضمن برنامج كليات الفنون في (باريس) و(شارتر) أثناء كل العصر الوسيط الأول، بعد المقولات والعبارة. الكتابين اللذين كانا وحدهما معروضين من بين كتب أرسطو حتى منتصف القرن الثاني عشر. ويجب أيضا أن نفسح المكان للمنطق العربي وخاصة لمساهمة ابن سينا وابن رشد: فإن شروحهما قد ساهمت ابتداء من القرن الثالث عشر في تعريف الغرب بمجموع كتب الأورغانون ولم يكن الشراح مفقودين في القرن الثالث عشر في الفلسفة المدرسية المسيحية، حيث يجب أن نذكر من أهمهم (ألبير الأكبر) و(القديس توما الأكويني). غير أننا في نهاية القرن الثالث عشر نبدأ نلاقي منطقيين لم يكتفوا بشرح أو تفسير منطق أرسطو بل أرادوا أن يستغلوا تركة الماضي إلى أقصى الحدود. ولهذا اهتموا بوجه خاص بجوانب من المنطق الأرسطي اعتبروها غير مدروسة بالقدر الكافي، بل قد أهملها القدماء. وعندئذ رأينا كتبا جديدة تظهر: de Syncategorematibus [الألفاظ الحملية التابعة]، de suppositionibus [الشرطيات]، de consequentiis [اللزوميات]، de insolubilibus [المعضلات]، إلخ..، ونسقيات جديدة للمنطق أدخلت فيها عناصر جديدة.

وما يزال من غير الممكن، بسبب كثرة الوثائق الموجودة وصعوبة نسخ ودراسة المخطوطات والطبعات القديمة الأولى، أن نكوّن فكرة تامة ودقيقة بالقدر الكافي عن المنطق في العصر الوسيط. لكن الذي نعرفه من الآن هو أن المنطقيين الوسيطيين لم يكتفوا كما ظن ذلك طيلة قرون بالقيام ببعض التحسينات التقنية للمنطق القديم مثل تقنين قواعد القياس أو تثبيت الضروب القياسية الصحيحة بواسطة كلمات لاتينية (Celarent، Barbara، إلخ...)، وفي ميدان التحليل الدلالي، وفي ميدان المنطق في حد ذاته، قدموا مساهمتهم الخاصة، وهي مساهمة تعتبر اليوم مهمة وتشهد لهم بحس حاد جدا بما يجب أن تكون عليه الصورية المنطقية[1].

(1) CF. BOCHENSKI, Formale logik, p. 169-224

1 - التحليل الدلالي

إن اهتمام المنطقيين الوسطيين بتحليل العناصر الصورية للاستدلال، قد ظهر منذ القرن الثالث عشر، وربما قبل ذلك، مع الكتب الموضوعة حول (الألفاظ الحملية التابعة). وموضوع هذه الكتب هو بالفعل تحديد ما هي الألفاظ التي تحيل في الكلام إلى «مدلول» أي إلى شيء، وما هي الألفاظ التي ليس لها معنى إلا بارتباطها بها. فالألفاظ الأولى تسمى حملية Catégorématiques يمكن أن تكون موضوعات أو محمولات في قضية جزمية، بينما الألفاظ الثانية التي تسمى حملية تابعة Syncatégorématiques لا يمكن أن تكون موضوعات ولا محمولات عندما تستعمل على الأقل حسب وظيفتها الطبيعية التي هي وظيفة صورية[1]. فالألفاظ من مثل: كل وبعض ولا شيء ووحده، إلخ.. التي تحدد ما صدق الموضوع، والأساليب التي تقيد المحمول وأدوات العطف وأدوات الفصل، هي ألفاظ حملية تابعة: فهي لا تعطي القضية ولا الكلام صورتها، بينما الألفاظ الحملية تمثل مادتها. ولهذا يمكننا أن نعتبر التمييز بين الألفاظ الحملية والألفاظ الحملية التابعة، أمرا قد سبق التمييز الحديث بين المتغيرات والثوابت[2].

إن البحث في الألفاظ الحملية التابعة، مرتبط في العصر الوسيط بمبحث الفحوى Supposition ويفترضه. فالفحوى هي بالفعل الصفة التي تجعل الألفاظ الحملية تحل محل (=تقوم مقام..) الوقائع الذهنية أو الخارجة عن الذهن التي تستعمل للإشارة إليها. وموضوع مبحث (الفحاوى) هو على وجه الضبط أن يحدد، بالنظر إلى مختلف أنواع القضايا، ما هي في كل حالة (فحوى) الموضوع بالنسبة إلى المحمول. وهذا التحليل مهم جدا بالنسبة إلى المنطق الذي نظر إلى اضطراره إلى التعبير باللغة الطبيعية لانعدام لغة اصطناعية أدق، فهو ملزم بمعرفة ما هي الأشياء التي «تفحو بها» في قضية معينة الكلمات الحملية وكيف تمارس فحواها[3]؟

---

(1) في مقابل الوظيفة المادية، لأن الكلمة الحملة التابعة إذا ما استعملت استعمالا ماديا فإنه يمكنها أن تقوم بدور الموضوع، كما هو الحال في القضية التالية: «كل هو سور».

(2) CF. Introduction, IV, P.6

(3) في الفحوى قسمان كبيران: الفحوى المادية والفحوى الصورية، وهذه بدورها تتفرع إلى فحوى بسيطة وفحوى شخصية تتفرع من جديد إلى فحوى خاصة discrète وفحوى مشتركة. وهذه تقسيمات Walter BURLEIGH في كتابه De Puritate artic logicae, ed. PH. BOEHNER, New York., 1955, P. 1- 46.

2 - منطق اللزوم

إن المنطقيين الوسطيين جديرون بأن يحلوا في مكانهم في أعقاب أرسطو و(خريسيبوس) Chrysippe في تاريخ المنطق[1]. إن منطق اللزوم ينبغي تقريبه من المنطق الرواقي في القضايا، لكن لا يبدو أن له صلة به من الناحية التاريخية. بل يظن بعض الباحثين، على الرغم من اختلاف الآراء في هذا الموضوع، أن منطلق الأبحاث الوسيطية حول اللزوميات، ينبغي البحث عنه في بعض المقاطع من (مواضيع) أرسطو التي تتناول وسائل الاستدلالات غير القياسية. والأكيد على كل حال هو أن المنطقيين الوسيطين قد وضعوا مفهوما للزوم ليس عديم الصلة بمفهوم الاستلزام في المنطق المعاصر، وأنهم بسعيهم إلى تحديد القواعد التي تحكم اللزوميات الجيدة، قد اكتشفوا عددا من قوانين منطق القضايا التي أعاد المحدثون بدورهم اكتشافها[2].

إن اللزوم، بالمعنى التقني الذي أعطاه إياه المنطقيون الوسيطيون، هو قضية ذات صورة شرطية أو افتراضية: فهي تتركب على الأقل من قضيتين بسيطتين تربط إحداهما بالأخرى الكلمات الحملية التابعة : (إذا.....فـ) أو ما يعادلها. ويكون اللزوم صحيحا أو القضية الشرطية صادقة إن استحال أن يكون مقدمها صادقا وتاليها كاذبا. وتوجد عدة أنواع من اللزوم، وقد عمل المنطقيون في القرن الرابع عشر على تمييزها. فهناك: اللزوميات الصورية التي لا تتوقف صحتها على صدق أو كذب القضايا التي تتألف منها. بل على صورتها فقط («إذا كان كل إنسان يجري، فإن بعض الإنسان يجري»)، واللزوميات المادية التي تطابق الاستلزام المادي عند المحدثين والتي تكون صحتها تابعة لصحة القضايا التي تتركب منها («إذا كان الإنسان يجري، فالإله موجود»)، وتنقسم اللزوميات المادية بدورها إلى لزوميات مطلقة (بشكل بسيط simplifier) مقبولة بشكل كلي («كل حيوان يجري، إذن فكل إنسان يجري»)، وإلى لزوم واقعي de fait (ut nunc) صحته مرتبطة بالزمان («كل

---

(1) CF. MOODY, Truth and consequence in mediaeval logic, Amesterdam, 1953, P.64. sv

(2) لقد عرفوا القوانين التي تحكم العطف والفصل وتعدية الاستلزام، وقانون ثنائية العطف والفصل التي أصبحت تسمى قانون (دي مرغن) راجع Chp. II، ص 69 في الأصل.

إنسان يجري إذن فسقراط يجري»)[1].

وينبغي أن نضيف المنطقيين الوسيطيين الذين درسوا في أول الأمر اللزوميات لذاتها وكنظرية مستقلة، تأدوا شيئا فشيئا إلى اعتقاد أن كل الاستدلالات الصحيحة (الاستدلالات المباشرة، والأقيسة والأقيسة الإضمارية...إلخ) تؤول إلى لزوميات صحيحة، ومراعاة لوجهة النظر هذه، فإنهم ابتداء من القرن الرابع عشر قد عكسوا الترتيب المنطقي الذي وضعه أرسطو، جاعلين المرتبة الأولى لنظرية اللزوميات في تنظيمهم للمنطق، ومعتبرين القواعد الخاصة بنظرية القياس قواعد خاصة من اللزوميات.[2]

إن هذه الملاحظات كافية لبيان أن المنطقيين الوسطيين ليسوا كما ظن الناس مجرد معيدين لأرسطو: ونظرا إلى ثراء تحليلاتهم والطابع الدقيق لصياغاتهم ونسقياتهم الجديدة التي وضعوها لمجموع المسائل المنطقية، فهم جديرون بأن يحتلوا مقاما محترما في تاريخ المنطق.

III - المنطق المعاصر

ومن نهاية القرن الخامس عشر إلى منتصف القرن التاسع عشر، أي إلى ظهور المنطق المعاصر أصيب المنطق الصوري بزوال ثقة الناس فيه، نتيجة لسوء الأعمال المدرسية في نهاية العصر الوسيط ولانتقادات ذوي النزعة الإنسانية، وبعض الفلاسفة مثل (بيكن) و(ديكارت) كرد فعل ضد هذه الأعمال. ومع ذلك يبرز اسم في هذه الفترة من انحطاط المنطق: هو اسم (ليبنيتس) Leibniz الذي ينبغي اعتباره الرائد الأول للمنطق المعاصر.

وبالفعل فإن هذا المفكر العبقري ارتأى في شبابه (كان في سن العشرين) أن ينشئ لغة اصطناعية رمزية تسمح برد الاستدلال إلى حساب على رموز. وهذا من دون شك هو معنى تأنيبه الشهير: Sedeamus et Calculemus [لنتوقف ولنحسب]. لكن مشروع (ليبنيتس) كان ضخما، واللغة التي أراد إنشاءها وسماها الكتابة العامة Caractéristique Universelle كان عليها أن تشمل جميع ميادين المعرفة، وكان هذا المطمح يستلزم بالفعل

(1) هذه التقسيمات ALBERT DE SAXE (cf. Perutilis logica, tract.4, cap.I).

(2) Walter BURLEIGH هو حسب ما يقول Ph. BOEHNER (cf. Medieval logic,. p, 84) من أوائل الذين وضعوا اللزوميات على رأس كتابه De puritateartis logica.

ضرورة القيام بإحصاء الأفكار البسيطة التي كان (ليبنيتس) يعتقد أن مجموع التصورات لا بد أن ترتد إليها، لكي يضع لكل فكرة بسيطة رمزا خاصا بها. ثم بتركيب هذه الرموز جميع التركيبات غير المتناقضة الممكنة نستطيع أن نعبر عن كل التصورات الممكنة.

ومجمل القول أن جبر المنطق كما تصوره (ليبنيتس) أراد أن يستعيض عن التصورات بتركيبات من الرموز، وعن القضايا بعلاقات بين الرموز، وعن الاستدلال بضرب من الحساب من شأنه أن يقدم «طريقة ناجعة لبرهنة القضايا واكتشاف قضايا جديدة منها»[1]. لكن هذا المشروع كان طموحا جدا ليستطيع القيام به إنسان واحد. ولهذا سرعان ما نسيت محاولاته إلى درجة أن بعض المنطقيين في منتصف القرن التاسع عشر عندما استأنفوا فكرة الحساب المنطقي قد فعلوا ذلك دون أن يطلعوا على أعمال (ليبنيتس). وكان المبادرون إلى ذلك (دي مرغن) De Morgan (1806 – 1878) الذي ندين له بأنه دشن منطق العلاقات، و(ج. بول) G. Boole (1815 – 1864) الذي، حوالي 1847، توصل إلى نتيجة مماثلة لنتيجة (ليبنيتس): وهي إنشاء لغة منطقية على غرار الجبر، تتجنب نقائص اللغة المنطوقة وتسمح بمعاملة الاستدلال معاملة الحساب.

ولمزيد من الوضوح سنميز في تطور المنطق المعاصر أربع مراحل متعاقبة تقريبا بالنسبة إلى المراحل الثلاث الأولى على الأقل.

1 - انواع الجبر الأولى (حوالي 1850 – 1890)

إن هذه «الضروب من الجبر المنطقي» مع أعمال (بول) Boole و(بيرس) Peirce و(شرودر) Schroder انطلقت كلها من الفكرة الأساسية عند (بول) والتي كانت هي فكرة (ليبنيس) وهي إمكان الموازاة بين العمليات الجبرية والعمليات المنطقية، وعندئذ يمكننا أن نعبر عن صورة اللغة المنطقية برموز مماثلة للرموز الجبرية من أجل إخضاعها للحساب. ولهذا اعتبر (بول) الفصل «أو» مثل الجمع والعطف «و» مثل الضرب، ورمز إلى الصنف الفارغ بالصفر «0» وإلى الصنف التام بالرقم «1». وبهذا توصل إلى تكوين جبر منطقي، المتغيرات فيه تمثل بطبيعة الحال أصنافا، لكن يمكن أن تؤول تأويلات أخرى.

---

(1) CF. COUTURAT, La logique de Leibniz, Paris, 1901. p.98.

2 - المناطق المصادراتية (1880 - 1920)

ومع (فرغه) Frege و(بيانو) Peano ولا سيما مع (وايتهد) Whitehead و(راسل) Russell، فإن المنطق مع الاستمرار في استلهام الطرق الرياضية، قد حاز استقلاله بالنسبة إلى الجبر العادي. وقد عمل المنطقيون الرمزيون في هذه الفترة لوضع منطق يستطيع أن يسمح بالتعبير عن مجموع الرياضيات الكلاسيكية في صورة نظرية استنتاجية قائمة على مصادرات بحيث يكون من المستحيل ظهور متقضات Paradoxes [1]. إن الكتاب الكبير الحكم الذي يحمل عنوان Principia mathematica والذي كتبه (وايتهد) و(راسل) (1910 - 1913) يستجيب بالضبط لهذا الغرض: فجملة المنطق معروضة فيه في صورة نسق مصادرياتي حسب نظام أصبح منذئذ كلاسيكيا وهو يشمل: حساب أو منطق القضايا، حساب الدوال القضوية أو المحمولات من المرتبة الأولى (الذي يشكل حساب العلاقات) وحساب الدوال والمحمولات الواسعة[2].

3 - الأنساق المصورنة (منذ 1920 تقريبا)

ومع (هلبرت) Hilbert خطا المنطق خطوة أخرى نحو التجريد والدقة ببناء نفسه «كنسق صوري» أو «مصورن». ففي منطق (Principa mathematica) نجد أن قواعد التركيب والاستنتاج، أي قواعد استعمال الرموز ليست مصوغة كقواعد، وأن المراحل في المبرهنات ليس مصرحا بها كلها دائما. وإذا ما أردنا أن يساهم المنطق في حل مشكلة «أساس الرياضيات» أي أن يكون الأساس الوطيد الذي يمكن أن يقوم عليه مجموع الرياضيات، فإنه ينبغي أن لا يترك شيء للتحكم في بنائه وفي تطوره. فيجب أن تحدد لغته تحديدا دقيقا (بواسطة قواعد تركيبية) وأن تكون الإجراءات البرهانية محددة بدقة (بواسطة قواعد استنتاجية). وهذا يؤول إلى إعطائه صورة مصادريات تامة الصورنة (كما بيناها في ص. 5 وما بعدها) [في الأصل]. وفي نفس الوقت يتحول المنطق من منطق جزمي استنتاجي حسبما بقي حتى مع المنطقيين الرمزيين الأوائل، إلى منطق افتراضي استنتاجي على غرار العلوم الوضعية الأخرى.

---

(1) والمقصود هو المتقضات التي ظهرت في القرن العشرين في أحضان نظرية المجموعات. والتي بين (راسل) أنها منطقية وليست رياضية.

(2) سندرس هذه الحسابات في البابين التاليين الثاني والرابع.

لقد كان يجب على هذا التحول في المنطق أن يشجع بطبيعة الحال إنشاء أنساق منطقية جديدة.و بالفعل إذا كانت البديهيات والقواعد لم تعد تختار حسب بداهتها، بل بطريقة اصطلاحية، فإنه يمكن أن نغير أو أن نحذف هذه البديهية أو تلك، وأن نتبنى قواعد مختلفة وأن نبحث عما إذا كان الناتج منها يعطي نسقا غير متناقض. وهكذا ومنذ 1920 حصل في المنطق، ما حصل قبل ذلك بسنوات قليلة في الهندسة:و مثلما أن هذه لم تعد وحيدة، بظهور هندسات لا إقليدسية، تنوع المنطق وتعدد.

وإلى جانب نسقي (راسل) و(هلبرت) والأنساق التي لها قرابة بهما، والتي أصبحت تمثل «المنطق الكلاسيكي» من حيث قيامها، مثل المنطق التقليدي على تعاند الصدق والكذب أو ازدواج القيمة. وهذه أساسا هي المناطق الثلاثية القيم، التي تسلم بين الصدق والكذب بوجود قيمة ثالثة، والتي من هذه الزاوية لا يعود قانون الثالث المرفوع مقبولا، والمنطق الحدساني الذي وضعه (بروور) Brouwer و(هايتنغ) Heyting والذي يمتنع من استعمال قانون الثالث المرفوع دون إنكاره: وهو منطق ذو قيم غير متناهية، والمناطق الموجهة، التي أنشئت في وقت متأخر والتي تقترب من المناطق الثلاثية القيم من جهة كون العوامل الموجهة (الضرورة، الجواز، الممكن، المستحيل) بتراكبها مع الصدق والكذب، تزيد عدد العنادات الممكنة[1].

وينبغي أن نضيف أن بعض المنطقيين (كري، تشرتش، إلخ..) Curry, Church بذهابهم في التجريد إلى أقصى درجاته، قد وضعوا أنساقا لا تحتوي على نوع واحد من الرموز التي يمكن أن تحل محل أي كيان، والتي تمثل بعض تركيباتها تحديد كيان بكيان آخر. إن هذه المناطق التي تسمى مناطق توفيقية Logiques Combinatoires لا تتعلق مباشرة بالعبارات الرمزية، بل بالعمليات التي يمكن إجراؤها على هذه العبارات.

---

(1) إن المنطق الموجه قد دشنه أرسطو بنظريته في الأنساق الموجهة (التحليلات الأولى II) وقد حسنه المنطقيون الوسيطيون كثيرا، لكن لم يتمكن أي واحد منهم من أن يعرض بشكل واضح ودقيق تماما(لانعدام الترميز المناسب) القوانين التي تحكمه وخاصة عندما تتراكب الجهات.

4 - الدراسات النظرية الشارحة

ومنذ 1920 ولا سيما ابتداء من 1930، انضافت إلى الأعمال المنطقية الخالصة كتتمة لازمة لها، أبحاث نظرية شارحة أو منطقية شارحة Métathéoriques ou métalogiques أي أبحاث جعلت موضوعها هو دراسة الأنساق الصورية لذاتها.

وأهم الأبحاث في هذا المجال تتعلق بالخصائص الصورية لمختلف الأنساق لا سيما طابعها غير المتناقض أو المتماسك، وبتاتيتها، واستقلال البديهيات، والعلاقات القائمة بينها (التشاكل أو تعدد الأشكال) وتأويلها الممكنة بالبحث عن «نماذج»[1]. وبدفع من (كارناب) Carnap ومن (تارسكي) Tarski توصلت الدراسات النظرية الشارحة إلى تكوين مبحثين جديدين: هما التركيبيات Syntaxe أو علم استعمال الرموز، والدلاليات sémantique أو العلم الذي يدرس علاقات الرموز بالأشياء التي تعنيها. وقد أصبح أولهما أداة ضرورية للدراسات المنطقية، وثانيهما تتمتها الطبيعية.

ومن هذه اللمحة التاريخية السريعة نستخلص النتائج التالية:

1 - لا يوجد تعارض حقيقي بين المنطق القديم التقليدي والمنطق المعاصر، على الرغم من اختلافهما في الغرض وفي المنهج. والأحسن من ذلك أن الصورنة الحالية للمنطق، تبدو لنا النهاية الطبيعية للمثل الأعلى الصوري كما كان القدماء، يتصورونه[2].

2 - إن الصرح الحديث للمنطق «الكلاسيكي» أي الثنائي القمة ثري ومتنوع جدا أكثر مما كان عليه صرح المنطق التقليدي: فمنطق القضايا الذي دشنه الرواقيون قد توسع كثيرا، ومنطق الدوال القضوية تجاوز بكثير نظرية القياس الأرسطية، وهو يشمل منطق العلاقات الذي ابتدع برمته، و«التركيبيات» و«الدلاليات» كعلمين هما مبحثان جديدان، غير أنه اكتشفت بعد فوات الأوان، إما عند أرسطو وإما عند المنطقيين الوسيطيين، تحليلات أو أحيانا مجرد ملاحظات كان يمكن أن توجه الأبحاث المعاصرة.

(1) ينبغي الرجوع إلى الباب 5، ص 116 حاشية 1 (من الأصل).

(2) CF. notre ouvrage : Logique et métalogique, Lyon – Paris, Em. Vitte. 1957, p.70.

3 - إن المنطق الحديث قد دفع بالتنظيم النسقي لقوانين الاستدلال، إلى أبعد مما فعل المنطق «الكلاسيكي» الذي لم يتمكن من تنظيم النظريات القديمة والوسيطية تنظيما مرضيا. ومن الآن فصاعدا أصبح صرح المنطق كلا مهيكلا تماما، ننتقل فيه بمراحل متتالية وحسب إجراء موحد الصورة، من منطق القضايا الذي هو المنطق الأبسط والأكبر جوهرية، إلى «مناطق» متزايدة في التركيب، تذهب من منطق الدوال أو المحمولات من الرتبة الأولى إلى منطق المحمولات المعممة أو المناطق من الرتبة العليا والتي يمثل مجموعها بنية التفكير المنطقي.

4 - والجديد كل الجدة في المنطق المعاصر يكمن في وضع أنساق غير كلاسيكية. وهل ظهورها يعني التخلي عن فكرة تشريع منطقي مطلق كان المنطقيون الرمزيون الأوائل مازالوا يسلمونه؟ إن بعض المؤلفين يرون ذلك («نادي فيينا» مثلا). وبعضهم الآخر، مع اعترافهم بأن هذه المناطق الحديثة أوفق من المنطق الكلاسيكي لبعض ميادين البحث[1]، يتمسكون بأولية المنطق الكلاسيكي الثنائي القيمة. لكن البت في هذا المستوى لا يرجع كله إلى المنطقي، بل على الفيلسوف أن ينوب عنه في ذلك.

* * *

(1) وهكذا يكون المنطق الثلاثي القيم مطلوبا من طرف الفيزياء الكوانتية.

الباب الثاني

منطق القضايا غير المحللة

إن منطق القضايا غير المحللة سمي هذا الاسم، لأن موضوعه هو دراسة صور الاستدلال الذي تكون صحته مستقلة عن بنية القضايا التي يتركب منها، وناتجة فقط عن كونها تشترك في الصدق أو الكذب حسب الروابط التي توجد بينها، ومن أمثلته اللامبرهنات الرواقية واللوزوميات الوسيطية.

إن هذا المنطق ليس ملزما بأن يعرف ما هي في الواقع القيمة الصدقية للقضايا التي يدرسها.بل يكتفي بأن يعرف أن كل واحدة منها يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة، ولا يمكن أن تكون إلا صادقة أو كاذبة[1]. فمثل هذه القضايا المعتبرة في جملتها ينبغي اعتبارها متغيرات، بينما الكلمات التي تربط هذه بعضها ببعض في الاستدلال (و_ أو_ إذا...ف..) والتي يجب أن يبقى معناها هو هو، تمثل ثوابت منطقية: وتسمى عوامل (أو روابط)، لأنها تمكننا من الحصول من قضايا بسيطة على قضايا أخرى أكثر تركيبا.

إن المنطقيين المحدثين قد وضعوا عددا من الطرق لتحديد ما هي، من بين صور الاستدلال الممكنة، الصور التي تعطي استدلالات صحيحة، أيا كانت القيم الصدقية للقضايا التي تتركب منها.وسنعرض بالتوالي ثلاثا من هذه الطرق.

---

(1) إننا نضع أنفسنا بطبيعة الحال في إطار المنطق الكلاسيكي الثنائي القيمة. وأما في المنطق الثلاثي القيم فإنه يجب التسليم بقيمة ثالثة.

I- طريقة الدوال الصدقية (او المصفوفات)

إنها أسهل الطرق بالنسبة إلى أول تدريب. وتتمثل في تعيين القيمة الصدقية لعبارة قضوية مركبة ابتداء من القيمة الصدقية للقضايا الحجج حسب طبيعة عاملها، أي حسب طبيعة الرباط المنطقي الذي يربطها، وهكذا فإن العبارة القضوية: « الجو حار والشمس تلمع » التي تحتوي قضيتين حجتين تربطهما أداة العطف «و»، نقول عنها إنها صادقة (إذا وفقط إذا) كانت حجتاها صادقتين. وتكون كاذبة في الحالات الثلاث الأخرى الممكنة، أي إذا كانت الحجة الأولى صادقة والثانية كاذبة، وإذا كانت الأولى كاذبة والثانية صادقة، وإذا كانت الحجتان كلتاهما كاذبتين.

ويطلق اسم الدالة الصدقية على كل قول من هذا القبيل، تكون قيمته الصدقية تابعة fonction لحجتها أو لحججها. وقد لا يكون للدالة الصدقية إلا حجة واحدة. وهو حال قولنا: « ليس صحيحا أن الشمس تلمع » حيث لا تكون العبارة « ليس صحيحا أن » متغيرا كما هو شأن « الشمس تلمع » بل هي ثابت – أو عامل – يمكن أن ينطبق على أي قضية. ويمكن أن تكون حجج الدالة الصدقية لا قضايا بسيطة، بل عبارات قضوية مركبة، أي دوال صدقية أخرى. ففي قولنا الشرطي «إذا نزل المطر وإذا سقط الثلج، كان الجو باردا»، فإن الحجة الأولى «إذا نزل المطر وإذا سقط الثلج » هي نفسها دالة صدقية يجب قبل كل شيء تحديد قيمتها قبل التمكن من تحديد قيمة الدالة الصدقية التي تدخل في تكوينها. وها هي ذي باختصار المراحل الرئيسية لهذه الطريقة.[1]

1- المتغيرات والثوابت

إننا نضع لأنفسنا قبل كل شيء – وهذا يصلح لكل الطرق التي يمكن استعمالها – لغة رمزية. وبالنسبة إلى منطق القضايا، فإن هذه اللغة تضم بشكل أساسي نوعين من الرموز: رموز المتغيرات: وهي : «ق»، «ل»، «م»،.... التي تمثل أي قضايا، ورموز الثوابت وهي: عامل ذو حجة واحدة هو عامل النفي «~» الذي يوضع قدام المتغيرات « ~ ق »، أو

(1) ومن أجل عرض أوفى يمكن الرجوع إلى كتاب J.Dopp الذي هو: Leçons de logique formelle.t.II.p.21.sv أو كتاب R.BLANCHE الذي هو: Introduction à la logique contemporaine.Paris.1057.p.35 sv.

قدام عبارات قضوية باعتبارها كلا «~ (ق ∧ ل)»، وأربعة عوامل ذوات حجتين: عامل العطف « ∧» وعامل الفصل « ∨ » وعامل التكافؤ « ≡ » وعامل الاستلزام « ⊃ » التي توضع بين المتغيرات التي تربط بعضها ببعض:(ق ∧ ل)، (ق ∨ ل)... (= عوامل ثنائية).

2- تعريف العوامل

ثم نعرف العوامل المعتمدة لإعطائها دلالة محددة تستبعد كل لبس في استعمالها. ولهذا الغرض نستعمل جداول (تسمى مصفوفات) تبين كيف تتحدد القيمة الصدقية للدالة التي يقيمها عامل من العوامل حسب القيمة الصدقية للحجة أو للحجج. » والجداول التالية هي بمثابة التعريفات لمختلف العوامل والدوال المطابقة لها. ويمثل فيها الرمز « 1 » قيمة «الصدق» والرمز «0» قيمة «الكذب».

(أ) النفي (« ~ »). وبما أن عامل النفي عامل ذو حجة واحدة قد تكون بسيطة أو مركبة فإن هناك احتمالين نتصورهما حسبما تكون الحجة صادقة أو كاذبة:

القيمتان الممكنتان للحجة ----------------	ق	1	0
قيمتا الدالة المطابقتان لها ----------------	~ ق	0	1

إن دالة النفي « ~ ق » لها دائما قيمة صدقية تقابل القيمة الصدقية لحجتها.

(ب) العطف (« ∧ »). ومع العوامل ذوات الحجتين، ونظرا لإمكان أن تكون كل واحدة منهما صادقة أو كاذبة، فإن التأليفات أو الاحتمالات الممكنة يكون عددها هو 4 (2^2)، أي 11، 01، 10، 00، التي تذكر دائما حسب هذا الترتيب (ارجع إلى الجدول التالي):

التأليفات الممكنة للحجتين (ق) و(ل)	ق	1	1	0	0
	ل	1	0	1	0
القيم المطابقة للدالة ----------	ق ∧ ل	1	0	0	0

فالعطف يكون صادقا (السطر الثالث من الجدول) إذا كانت حجتاه صادقتين، وكاذبا في الحالات الثلاث الأخرى.

(ج) الفصل (« $\vee$ »)

التأليفات الممكنة للحجتين (ق) و(ل)	ق	1	1	0	0
	ل	1	0	1	0
القيم المطابقة للدالة ----------	ق $\vee$ ل	1	1	1	0

فالفصل يكون صادقا عندما تكون إحدى الحجتين صادقة، وكاذبا فقط إذا كانت حجتاه كاذبتين.

د) التكافؤ (« $\equiv$ »)

التأليفات الممكنة للحجتين (ق) و(ل)	ق	1	1	0	0
	ل	1	0	1	0
القيم المطابقة للدالة ------------	ق $\equiv$ ل	1	0	0	1

يكون التكافؤ صادقا عندما تتفق الحجتان في قيمة الصدق، وكاذبا عندما تختلفان فيها.

هـ) الاستلزام (« $\supset$ »)

التأليفات الممكنة للحجتين	ق	1	1	0	0
	ل	1	0	1	0
القيم المطابقة للدالة ------------	ق $\supset$ ل	1	0	1	1

ويكون الاستلزام صادقا إلا إذا كانت الحجة الأولى (= المقدم) صادقة، والحجة الثانية (= التالي) كاذبة.

وأول هذه العوامل الأربعة يطابق تقريبا أداة العطف «و»، والثاني يطابق الفصل المانع للخلو والثالث يطابق العبارة « إذا وفقط إذا »، ويبقى عامل الاستلزام الذي نعبر عنه بقولنا «يستلزم»، وأحسن من ذلك قولنا « إذا...ف »، وقد يدعو هذا التعبير إلى ظن أن الاستلزام يطابق علاقة المبدأ باللازم. لكن يجب تجنب مثل هذا التوحيد لأن الاستلزام في المنطق الرمزي يهمل تماما دلالة القضايا، بينما علاقة المبدأ باللازم تتضمن دائما شيئا من الإحالة إلى هذه الدلالة. ولهذا يكون هناك استلزام صحيح بالمعنى الذي يحدده المنطق المعاصر بين القضيتين التاليتين: «إذا كانت الأرض تدور حول الشمس، فإن باريس هي عاصمة فرنسا» في حين لا يمكننا أن نتحدث في هذه الحالة عن علاقة مبدأ بلازم.

إن العوامل التي عرفناها منذ حين بواسطة جداول مناسبة، هي عوامل مطابقة لأكثر العمليات المنطقية استعمالا. لكن ليست هي العوامل الممكنة الوحيدة. بل في الواقع هناك (4) عوامل مختلفة ذوات حجة واحدة (2^{2^1}) و (16) ذوات حجتين (2^{2^2}).

ويقضية حجة واحدة تعطي العوامل الأربعة الدوال الصدقية الأربع التالية.

ق	1	2	3	4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

(النفي يطابق العمود 3)

وبقضيتين تعطى العوامل الأربعة الدوال الصدقية 16 التالية

ق	ل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

إن عوامل الأعمدة 2 و5 و7 و8 تمثل على التوالي الفصل والاستلزام والتكافؤ والعطف كما سبق لنا أن عرفناها. وعامل العمود 1 الذي أيا كانت القيمة الصدقية للقضايا الحجج، يعطي القيمة 1 في النتيجة،يسمى منذ (فتغنشتاين) التوتولوجيا tautologie [المصدقة]، بينما عامل العمود 16 يمثل التناقض، لأنه أيا كانت القيمة الصدقية للقضايا التي يتكون منها، فإن نتيجته كاذبة. وعوامل الأعمدة 4 و6 و11 و13،ليست ذات أهمية. وأما عوامل الأعمدة 15 و12 و10 و9، فهي بالضبط نفي للعوامل التي اعتمدناها. ويبقى عاملا العمودين3 و14 فإن أولهما يمثل الاستلزام من (ل) إلى (ق) أي (الاستلزام العكسي)، وثانيهما يمثل نفيه.

3- حساب الدوال الصدقية

وبعدما عرفنا، بواسطة الجداول السابقة، العوامل التي سنستعملها والدوال الصدقية التي تتكون منها، فإنه يمكننا أن نقوم بحساب دوال أكثر تركيبا ليست حججها مجرد متغيرات قضوية، بل دوال صدقية أخرى، يمكنها بدورها أن تكون حججها دوال صدقية جديدة وهلم جرا. وعندئذ يصبح من الضروري أن نحدد مجال تأثير مختلف العوامل بواسطة أقواس. وهكذا في الصيغة « ~ ق ∧ ل ⊂ ل » نحن لا نعرف إن كان عامل النفي ينصب على المتغير «ق» فقط، أو على الدالة «ق ∧ ل »، أو على الدالة برمتها. وعندما نكتب إما « ~ (ق ∧ ل) ⊂ ل »، وإما «(~ ق ∧ ل) ⊂ ل»، فإنه لا يمكن أن يحصل الالتباس.

ومع الصيغ الأكثر تركيبا ينبغي أن نستعمل عدة أقواس متتالية أو معا كيف أو حاضنات إلخ... وهكذا ففي العبارة « ق ⊂ ل ∧ ~ ل ⊂ ~ ق»، لا يمكننا أن نعرف ما هي الرابطة الرئيسية التي تتكون منها الدالة النهائية. وعندما نكتبها هكذا: « (ق ⊂ ل) ∧ ~ ل ⊂ ~ ق » بقوس مزدوج، فإننا نكون قد بينا تركيب الروابط: إذ الأمر يتعلق باستلزام مقدمه « (ق ⊂ ل) ∧ ~ ل » وتاليه ~ ل. والمقدم بدوره عطف، حجته الأولى استلزام هو « ق ⊂ ل » وحجته الثانية « ~ ل »[1].

(1) ويمكن أيضا استعمال النقط بالإضافة إلى الأقواس للفصل بين مختلف الحجج. فنكتب مثلا: «(ق ⊂ ل ∧. ⊂ م) ⊂ (ق ⊂ م) » بدلا من :«((ق ⊂ ل) ∧ (ل ⊂ م)) ⊂ (ق ⊂ م) »

ومع الأخذ بالملاحظات السابقة ها هي ذي الطريقة التي نحسب بها دالة صدقية مركبة، فقبل كل شي وحسب عدد المتغيرات المختلفة المذكورة في الدالة، نحدد ما هي تأليفاتها الممكنة: إنها اثنان 2 بالنسبة إلى متغير واحد، وأربعة 2^2 بالنسبة إلى متغيرين 2، وثمانية 2^3 بالنسبة إلى 3 متغيرات، وهلم جرا. ونكتب حسب ترتيب تعتمده نهائيا القيم التي يمكن أن يأخذها كل واحد من المتغيرات. ثم نحسب الدوال الداخلة في التركيب، بالاعتماد على التعريفات التي سبق إعطاؤها مبتدئين بأضعف العوامل.

إن هذه العمليات المختلفة قد أجريت في الجداول الثلاثة التالية حيث وضعنا لترتيب العوامل أرقاما ذاهبة من الأضعف إلى الأقوى، أي إلى العامل الرئيسي. وتحت كل واحد منها يوجد حساب الدالة التي تتكون منه، وتحت العامل الرئيسي يوجد حساب الدالة كلها. ومن الناحية العملية فإن العامل الرئيسي هو العامل الذي لا يكون محصورا بين أي قوسين.

(أ) حالة عبارة ذات متغير واحد « ق » – فلا يمكن أن يكون لها إلا قيمتان « 1 » و « 0 ».

	3	4		1	2	
ق	~	⊃	ق)	~	⊃	(ق
1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0

(ب) حالة عبارة ذات متغيرين مختلفين « ق » و « ل » – فيكون لكل متغير 4 احتمالات:

ل)	~	∧	(ق	⊂	ل)	⊂	(ق
	2	3		4		1	
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0

إن القيمة الصدقية للدالتين أعلى هذا السطر توجد في العمود 4.

(ج) حالة عبارة ذات 3 متغيرات (و فيها 8 حالات تأخذها بعين الاعتبار):

م)	⊂	(ق	⊂	م)	⊂	(ل	∧	ل)	⊂	(ق
	4		5		2		3		1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

إن القيمة الصدقية للدالة:

«(ق ⊂ ل) ∧ (ل ⊂ م). ⊂ (ق ⊂ م)»

يقدمها العمود 5.

4- القوانين المنطقية

في حسابنا لدالة صدقية يمكن أن نجد أنفسنا أمام حالة من الحالات الثلاث التالية: ليس في الحساب إلا حالات «1»، الحساب لا يحتوي إلا حالات « 0 » والحساب يحتوي حالات «1» وحالات «0» معا. وهذا في الحالة الأولى يعني أنه أيا كانت القيمة الصدقية للحجج التي تتكون منها الدالة، فإن هذه الدالة تحافظ دائما على قيمة « الصدق ». وبالتالي فإن جميع تطبيقاتها الممكنة على قضايا معينة ستعطي قضايا مركبة صادقة. فالدوال التي لا يحتوي حسابها إلا على حالات «1» هي دوال صادقة بمقتضى صورتها فقط: وبهذا المعنى فهي قوانين منطقية أو توتولوجيات [مصدقات] بالمعنى الاصطلاحي للكلمة. وهذا شأن العبارتين السابقتين (أ) و(ج).

وكل قانون منطقي يمكن أن نطابق بينه وبين خطاطة استدلال صحيح أو قاعدة استنتاجيه. فالقانون المنطقي «(ق ⊂ ل) ∧ (ل ⊂ م). ⊂ (ق ⊂ م)» الذي له صورة استلزام، يطابق خطاطة الاستدلال التالي الذي تشير فيه « ق» و«ل» و« م » إلى أية قضية: فإذا صح لدينا من جهة أن « ق ⊂ ل »، ومن جهة أخرى أن « ل ⊂ م »، أمكننا أن نستنتج صدق التالي « ق ⊂ م ».

وعندما لا يحتوي حساب دالة من الدوال إلا حالات « 0 »، وهذا يعني أن قيمتها هي الكذب أيا كانت القضايا التي نحلها محل المتغيرات، فإننا نكون أمام ما سميناه «تناقضا» لكن مثل هذا التناقض يمكن تحويله إلى توتولوجيا (أو قانون منطقي): ويكفي في هذا أن نطبق عليه عامل النفي.

وأما الدوال التي تضم معا حالات « 1 » وحالات «0» فليست ذات أهمية عند المنطقي لأنها لا تصلح بأي شكل من الأشكال لأن تستعمل كخطاطة لاستدلال صحيح.

إن طريقة الدوال الصدقية هي أفضل للمبتدئ لاعتمادها على عدد قليل من المفاهيم البسيطة، هي مفهوم القضية ومفهوم الصدق والكذب.ولكونها تقدم طريقة سهلة وذات صورة واحدة لتحديد ما إذا كانت عبارة من العبارات قانونا منطقيا أو ليست كذلك. لكن القوانين المثبتة بهذا الشكل مستقلا بعضها عن بعض، تكون متراكمة بدون صلة منطقية بينها. وبالإضافة إلى هذا فإن هذه الطريقة تصبح من الناحية العملية غير قابلة للاستعمال، أو، على كل حال، مزعجة جدا عندما نكون أمام عبارات تحتوي عددا كبيرا من المتغيرات المختلفة، وفي الأخير يصعب تطبيقها على الأجزاء الأخرى من المنطق، أي على حسابات المحمولات.

II- الطريقة المصادراتية

إن هذه الطريقة التي هي أكثر تجريدا وأصعب عند الوهلة الأولى ليس فيها نقائص الطريقة السابقة. فهي من جهة توافق بالفعل أيضا مختلف أجزاء المنطق[1]، ومن جهة أخرى فإن طابعها النسقي يجعلها بوجه خاص صالحة لإبراز القرابة البنيوية التي يمكن أن توجد بين بعض القوانين.

1- العبارات الجيدة التكوين والعبارات المقبولة

إن الطريقة المصادرتية تستعمل نفس أنواع الرموز التي تستعملها طريقة الدوال الصدقية: وهي رموز المتغيرات ورموز الثوابت أو العوامل. لكن العوامل المعتمدة بصفتها أولية لم تعد بالضبط معرفة في البداية بالإحالة إلى مفهوم القيمة الصدقية للقضايا. وهي بالإضافة إلى هذا ليست مأخوذة بحسب معناها الحدسي، لأن الحدس يجب أن يبقى بعيدا عن بناء نسق مصدرياتي يريد أن يكون صوريا بكل دقة. بل معناها هو المعنى الناجم عن مجموع البديهيات التي يوجد بها.

ولتمييز عبارات النسق وقوانينه فإننا لا نعود نرجع إلى مفهوم الدالة الصدقية بل إلى مفهوم العبارة الجيدة التكوين والعبارة المقبولة. وهناك قواعد (قواعد تركيب) تسرد

(1) إن كتاب principia mathematica الذي وضعه (وايتهد وراسل) يمثل أول تطبيق نسقي للطريقة على مجموع المنطق.

العبارات الجيدة التكوين، أي المسلم بها في النسق. وهي المتغيرات القضوية «ق»، «ل»، «م»... والعبارات الحاصلة من وضع عامل غير عامل النفي، بين متغيرين(أو عبارتين جيدتي التكوين «ق ∧ ل»، «(ق ∨ ل) ⊃ م»... والعبارات الجيدة التكوين التي يتصدرها عامل النفي «~ ق»، «~(ق ∧ ل)».

إن العبارات المقبولة، أي التي يعتبرها النسق صادقة، تشمل البديهيات، أي العبارات الجيدة التكوين المسلم بها من دون برهان في البداية، أو العبارات التي تستخلص منها بواسطة قواعد استنتاج.

2- مثال على نسق مصادرياتي

ومنذ مستهل القرن [العشرين] اقترحت لمنطق القضايا عدة أنساق مصادراتية[1]. وهي تختلف فيما بينها، إما بعدد وطبيعة العوامل المختارة باعتبارها أولية، وإما بعدد البديهيات. وفيما يلي نعرض النسق الذي تبناه (هلبرت وأكرمان) Hilbert –Ackermann (1920):وقد تم تحصيله من نسق (وايتهد وراسل) Whitehead et Russell (1910) بإسقاط بديهية تبين عدم استقلالها عن البديهيات الأخرى، أي إمكان برهانها بها:

(أ) بديهيات

I. ⊣ (ق ∨ ق) ⊃ ق

II. ⊣ ق ⊃ (ق ∨ ل)

III. ⊣ (ق ∨ ل) ⊃ (ل ∨ ق)

IV. ⊣ (ق ∨ ل) ⊃ ((م ∨ ق) ⊃ (م ∨ ل))[2]

(1) J.Dopp.Notions de logique formelle.p.261 sv. en donne une liste qui n'est pas exhaustive.

(2) لتمييز العبارات المقبولة (البديهيات والمبرهنات) عن العبارات الجيدة التكون فقط، فإننا نضع قدام الأولى الرمز «⊣» (رمز المقررة المنطقية assertion). وليس هذا عاملا جديدا بل رمز نظري شارح ينتمي إلى اللغة الشارحة في النسق.

(ب) قواعد – ولاشتقاق عبارات أخرى مقبولة، من بديهيات النسق تكون مبرهنات عنها théorèmes، يجب أن نتخذ عددا من قواعد الاستنتاج، أي من طرق البرهنة. وفي أغلب الأنساق اتخذت قاعدتا التعويض substitution واللزوم détachement كقاعدتين أساسيتين.

إن قاعدة التعويض تجيز أن نحل في عبارة مقبولة، متغيرا قضويا، حيثما ذكر، محل متغير قضوي آخر، أو عبارة جيدة التكوين (قاعدة SP). وتطبيق هذه القاعدة يشار إليه بمطة مائلة: « ق/ ~ق »، « ل / ق V ل » تعنيان على التوالي أن « ق » يجب أن تعوضها « ~ ق»، و«ل» أن تعوضها « ق V ل ».

وقاعدة اللزوم (détachement أو dérivation) التي ينبغي تقريبها من اللامبرهنة الرواقية الأولى (راجع ص. 18) – أو من (حالة الوضع بالوضع modus ponens) في المنطق التقليدي – عبارتها هي التالية: « إذا كانت العبارة « ق⊃ل » مقبولة، وكذلك العبارة « ق »، فإن العبارة « ل »تكون مقبولة أيضا.[1] ويمكننا أن نعطي هذه القاعدة صورة الخطاطة التالية:

⊣ ق ⊃ ل، ق ، ⊣ (قاعدة اللزوم)

⊣ ل

حيث تشير المطة الأفقية التي تفصل المقدمتين عن النتيجة. إلى القاعدة التي تجيز الانتقال من الصحة المعلومة في « ق ⊃ ل » وفي « ق » إلى صحة « ل »

ومع القواعد، فإن النسق يحتوي تعريفات[2] ينبغي اعتبارها تكافؤات équivalences بمعنى أنه في كل عبارة من عبارات النسق يمكننا أن نحل العبارة المعرِّفة definiens محل العبارة المعرَّفة definiendum وهذه التعريفات هي:

---

(1) إننا نستعمل بالقصد الحروف المسطرة للإشارة بها إلى العبارات القضوية أيا كانت، أي إما متغيرات فقط وإما عبارات أكثر تركيبا.

(2) ليست التعريفات لازمة بشكل مطلق، وقد توصلت بعض الأنساق إلى الاستغناء عنها.

تعريف الاستلزام:

ق $\supset$ ل = بالتعريف: ~ ق $\vee$ ل (التعريف 1)

تعريف العطف:

ق $\wedge$ ل = بالتعريف: ~ (~ ق $\vee$ ~ ل) (التعريف 2)

تعريف التكافؤ:

ق $\equiv$ ل = بالتعريف (ق $\supset$ ل) $\wedge$ (ل $\supset$ ق) (التعريف 3)

وبفضل هذه التعريفات فإن عدد العوامل الأصلية يرتد إلى عاملين 2 : عامل الفصل وعامل النفي. وبعدما يتجهز المنطقي بهذا الجهاز من البديهيات والقواعد والتعريفات، فإنه يكون قد امتلك الأدوات اللازمة، لكي يبرهن ابتداء من البديهيات، عبارات جديدة مقبولة أي المبرهنات. théorèmes لكن البرهنات سرعان ما تصبح ثقيلة جدا لو وجب في جميع الأحوال اللجوء بشكل مباشر إلى البديهيات وإلى القواعد الأساسية. ولهذا ومن أجل تخفيفها نضع لأنفسنا أثناء العمل قواعد مشتقة نبررها ابتداء من البديهيات والتعريفات والقواعد الأساسية.[1]

(جـ) مثال على البرهنة – نقدم فيما يلي برهنة الصيغة «~ ق $\vee$ ق» التي تطابق قانون الثالث المرفوع، والصيغة «ق $\equiv$ ق» التي تعبر عن قانون الهوية. وبما أن هذين القانونين لم يذكرا من بين البديهيات، فإنه يجب برهنتهما قبل أن ينضما إلى صف المبرهنات. وبالنسبة إلى كل مرحلة من مراحل البرهنة فإننا نشير إلى كل من البديهية والقاعدة والتعريف التي نطبقها، [بذكر اسمها].

- برهنة «~ ق $\vee$ ق»

[1] $\dashv$ (ق $\supset$ ل) $\supset$ (م $\vee$ ق. $\supset$. م $\vee$ ل)

(1) مثال القاعدة المشتقة: إذا كان لنا من جهة العبارة «ق» ومن جهة أخرى العبارة «ل»، كان لنا أيضا «ق $\wedge$ ل» (قاعدة1).

البديهية IV

[2] ⊣((ق v ق) ⊂ ق)) ⊂ ((~ ق v.ق v ق) ⊂ (~ ق v ق))

التعويض: ق / ق v ق، ل / ق، م / ~ ق

[3] ⊣ (ق v ق) ⊂ ق

البديهية I

[4] ⊣ (~ ق v. ق v ق) ⊂ (~ ق v ق).

(قاعدة اللزوم مطبقة على[2] وعلى[3].

[5] ⊣ (ق ⊂. ق v ق) ⊂ (~ ق v ق).

بالتعريف 1

[6] ⊣ ق ⊂. ق v ل

البديهية II

[7] ⊣ ق ⊂. ق v ق

بالتعويض: ل / ق

[8] ⊣ ~ ق v ق

قاعدة اللزوم (مطبقة على[5] و[7])

- برهنة « ق ≡ ق »

[1] ⊣ ~ ق v ق قانون الثالث المرفوع

[2] ⊣ ق ⊂ ق التعريف 1

[3] ⊣ ق ⊃ ق تكرار [2]

[4] ⊣ ق ⊃ ق ∧ ق ⊃ ق القاعدة المشتقة 1

[5] ⊣ ق ≡ ق التعريف 3.

إن منطق القضايا، بعرضه حسب طريقة مصادراتية دقيقة[1]، يمثل نسقا صوريا فارغا من المحتوى تماما، وصالحا من حيث هو كذلك لأن يتلقى تأويلات شتى. أقرها وأبدهها هو الذي يتمثل في اعتبار البديهيات والمبرهنات في مثل هذا النسق، تعبيرا عن قوانين منطق القضايا. وهذا ما فعلناه عندما أولنا الصيغ « ~ ق v ق »، « ق ≡ ق » على أنهما تعبيران عن قانون الثالث المرفوع وعن قانون الهوية. ويمكن أن نبرهن بطريقة مماثلة الصيغتين « ~ (ق ∧ ~ ق)»، «ق≡ ~ ~ ق» اللتين تمثل أولاهما قانون عدم التناقض والثانية قانون النفي المزدوج – وكذلك جميع الصيغ الأخرى التي تعبر عن قوانين منطق القضايا. ومجموع هذه الصيغ لا يغطي فقط القوانين المنطقية المستعملة في العادة، بل كثيرا من غيرها التي يمكن عند الحاجة أن تكون خطاطات استدلالية.

وصعوبة هذه الطريقة تكمن في كون البرهنة يتعين اكتشافها في كل حالة من الحالات، وفي كون البحث عنها غالبا ما يكون شاقا نتيجة للعمليات الملتوية التي تتطلبها. ومع ذلك سوف نرى في الباب الخامس أن هناك طريقة (هي الرد إلى الصورة العادية العطفية) تسمح « بالبت ».

بالنسبة إلى كل عبارة جيدة التكوين، إن كانت قابلة للبرهنة أو لا تقبلها، وبالتالي إن كان يمكن أو لا يمكن اعتبارها مبرهنة أو قانونا منطقيا.

III- طريقة الاستنتاج الطبيعي

إن طريقة الاستنتاج الطبيعي تختلف عن الطرق المصادراتية المأخوذة من كتاب principia mathematica من جهة كون البديهيات فيها لا تقوم إلا بدور ثانوي، ومن

---

(1) لم نتمكن من أن نقدم هنا جميع البيانات اللازمة، ومن أجل مزيد من التفصيل نرجع القارئ إلى كتاب: J. Dopp, Leçons de logique formelle, t.11, P.99 – 154.

جهة كونها تنبني أساسا، انطلاقا من عدد معين من القواعد.

وإلى هذا الفرق الذي هو فرق هام[1] يضاف فرق آخر كنتيجة له. فبينما أساليب البرهنة في الطريقة المصادراتية، هي أساليب بعيدة جدا عن الأساليب المستعملة في شكل طبيعي في العلوم، فإن «الصورانية تبقى قريبة جدا من الاستدلال الواقعي بقدر الإمكان» في طريقة الاستنتاج الطبيعي كما يدل عليه اسمه وحسب مشروع (غنتسن) Gentzen نفسه. وبالفعل في الرياضيات فإننا لا نشتق بشكل مباشر المبرهنات من البديهيات بواسطة عدد قليل من القواعد (مثل قاعدتي التعويض واللزوم)، بل يكون الانطلاق في الغالب من فرضيات أو افتراضات نستخلص منها بواسطة سلسلة من الاستنتاجات المنطقية، النتائج التي نجعلها في النهاية مستقلة عن الفرضيات الأولية باستعمال قواعد متاسبة. وهناك مثالان بسيطان يقدمان لنا فكرة عن هذا الأسلوب.

المثال الأول _ لنفرض أن علينا أن نبرهن أنه إذا كان لدينا « ق » كان لدينا «ق v ل». ولنفرض أن لدينا « ق » أي أن « ق » بديهية أو مبرهنة سبق برهانها. فبمقتضى المعنى المحدوس من « أو » (Vel =) سيكون لدينا أيضا « ق v ل »، وبعبارة أخرى إذا ما نحن افترضنا المقدم « ق » حصلنا التالي « ق v ل». إذن فالعبارة « ق ⊂. ق v ل » قانون منطقي.

المثال الثاني. – لنفرض أن علينا أن نبرهن أنه إذا كان لدينا « ق v (ل Λ م)» كان لدينا «(ق v ل) Λ (ق v م) » إننا نفرض أن « ق v (ل Λ م) عبارة مقبولة: أي 1 » أن لدينا «ق» و2 « أن لدينا « ل Λ م ».

– فإذا كان لدينا « ق » كان لدينا أيضا « ق v ل » وكذلك « ق v م » وبالتالي كان لدينا كذلك « (ق v ل) Λ (ق V م) ».

– وإذا كان لدينا « ل Λ م » نتج عن ذلك أن لدينا من جهة، «ل» وأن لنا من جهة أخرى «م». لكن إذا كان لدينا «ل» كان لدينا أيضا « ق v ل »، وإذا كان لدينا « م » كان

(1) راجع قبل هذا، الباب الأول الفقرة 1 ص 19.

لدينا «ق v م»، فيكون لدينا في الأخير: «(ق v ل) Λ (ق v م)». (تقوم البرهنة هنا في آن واحد على المعنى المحدوس من «أو» ومن «و»). وبما أن لدينا في الافتراضين «(ق v ل) Λ (ق v م)» فإنه يلزم من ذلك أنه إذا كان لدينا «(ق v (ل Λ م)» كان لدينا «(ق v ل) Λ (ق v م)».

إن طريقة البرهنة المستعملة في هذين المثالين تؤول إلى إثبات صحة بعض اللزوميات المركبة انطلاقا من المصادرة على صحة لزوميات أبسط منها. وهكذا في المثال الأول نصادر على أن اللزوم البسيط من «ق» إلى «ق v ل» صحيح، وفي المثال الثاني على أن اللزوم من «ل Λ م» إلى «ل» من جهة، وإلى «م» من جهة أخرى صحيح كذلك وهلم جرا. إن هذه اللزوميات البسيطة أو القواعد المطابقة لها – ستوضح وتوضع كقواعد أساسية في النسق.

لقد تحدثنا منذ حين عن اللزوميات. وبالفعل وخلافا للطريقة المصادراتية فإن البرهنات لا تنصب هاهنا بشكل مباشر على أقوال قضوية بل على أقوال لزومية من هذا القبيل: «إذا ما سلمنا هذه أو تلك العبارات القضوية (= المقدم) لزم عن ذلك عبارة قضوية جديدة (= التالي) الذي يكون صادقا إن كان المقدم صادقا. فالقول اللزومي يطابق إذن صورة استدلالية صحيحة.

وإلى مفهوم اللزوم ينضم بطبيعة الحال مفهوم القاعدة. وبالفعل فإننا بمقتضى قواعد ضمنية ننتقل في الاستدلال الطبيعي من هذا أو ذاك المقدم إلى هذا أو ذاك التالي. وفي المثالين اللذين قدمناهما إنما أمكننا أن ننتقل بمقتضى قاعدة من «ق» إلى «ق v ل» (المثال الأول)، وأن ننتقل بمقتضى قاعدة أخرى من «ل Λ م» إلى «ل» من جهة، ومن جهة أخرى إلى «م» (المثال الثاني).

وسنعرض طريقة الاستنتاج الطبيعي متبعين بشكل محسوس نفس الترتيب الذي اتبعناه في عرض الطريقة المصادراتية، أي بالبدء بإدخال الرموز التي سنحتاج إليها، والعبارات التي تستعمل في تكوينها، ثم بذكر البديهيات والقواعد التي تسمح ببرهنة مبرهنات الحساب.

1- رموز النسق وعبارته

سنستعمل نفس الرموز التي ترمز إلى المتغيرات («ق»، «ل»،«م»......) وإلى الثوابت (Λ،v،⊃،~) التي استعملناها في الطريقتين السالفتين. وسنضيف إليها الرموز « ق » و «ل» و« م»... لكي نمثل في الخطاطات عبارات قضوية أيا كانت، قد تكون مجرد متغيرات أو تراكيب من متغيرات. وأخيرا فإن الرمز «ك» سيستعمل للإشارة إلى القضية الكاذبة – أو المحال – والرمز «⊣» لكي يمثل علاقة المقدم بالتالي التي تتميز بها الطريقة «ق ⊣ ل» تقرأ: «من ق تنتج ل»، « ق، ل، م، ن. ⊣ ل) نقرأ: «من ق وم ون تنتج ل»[1].

إن عبارات النسق تضم إذن، علاوة على العبارات التي يمكننا أن نكوّنها بالعوامل العادية «ق Λ ل »، «ق v ل »،«ق v م. ⊃ ق »....أقوالا لزومية من صورة «ق⊣ل »، مثلا «قΛل ⊣ل»، «ق v م. Λ م ⊣ م »... وقد يكون للزوم عدة مقدمات، فتكون مفصولة بفاصلة ومأخوذة معا: «ق، ق Λ م،... ق،... » وقد لا يكون للزوم إلا مقدم واحد بل قد لا يكون له مقدم بتاتا. وفي هذه الحالة الأخيرة تكون صورة اللزوم هي «⊣ل » (مثلا «⊣قv ~ ق »)، ومعنى هذا أن العبارة « ل » (هنا « ق v ~ ق ») مقبولة قبولا غير مشروط دون افتراضات أو فرضيات، وبعبارة أفضل أيا كانت الافتراضات أو الفرضيات التي يمكن أن تنصب عليها: فهي إذن مكافئة لقانون منطقي.

2- البديهيات والقواعد

إن طريقة « الاستنتاج الطبيعي » لا تصادر في صورة بديهيات إلا على اللزوميات التي يقتصر فيها التالي على تكرار المقدم: وهذه اللزوميات تكتسي الصورة التالي التي تسمى خطاطة بديهيات: ق ⊣ ق حيث تمثل « ق » أي عبارة قضوية بسيطة أو مركبة.

ولكي نتمكن من الحصول على لزوم مقبول أو عدة لزوميات مقبولة، يجب أن يكون

---

(1) إننا قصدنا عدم استعمال الفعل «يستلزم » تجنبا لإلحاق علاقة المقدم بالتالي، بالاستلزام على الصورة التي حددناها في بداية هذا الباب. ولهذا لا ينبغي إعطاء العلاقة التي يشير إليها الرمز «⊣» أي معنى حدسي يعبر عنه الفعل «تنتج ». وليس لهذه العلاقة معنى آخر إلا المعنى الذي ينجم عن مجموع بديهيات النسق وقواعده. وعندما نتحدث عن اللزوم فإننا نقصد دائما هذا المعنى التقني.

لدينا بعض الخطاطات الاشتقاقية التي يجب اعتبارها قواعد تقوم بدور أساسي في طريقة الاستنتاج الطبيعي.

وهذه القواعد ضربان، فبعضها وهي قواعد بمعنى الكلمة تحدد الشروط التي يمكن بها أن ندرج عاملا من العوامل، إما في المقدم وإما في تالي لزوم من اللزوميات: وهذه هي القواعد الإجرائية. والقواعد الأخرى التي ليست لازمة مطلقا للنسق، لكنها تسمح بتبسيط القواعد الحقيقية، هي قواعد بنيوية: وهي لا تتعلق إلا بصورة أو بنية اللزوميات أو الاشتقاقات.

وقواعد الاشتقاق المسماة كذلك تجوزا (أو القواعد البنيوية) هي التالية:

(أ) عندما يكون اللزوم مقبولا (أي عندما يكون بديهية أو مبرهنة) فإنه يبقى مقبولا:

- إذا أضفنا إليه مقدما واحدا أو عدة مقدمات، أيا كانت: قاعدة التخفيف (ش^{1}).

- إذا غيرنا ترتيب مقدماته: قاعدة المبادلة (ش^{2}).

- إذا حذفنا تكرار واحد أو عدة من مقدماته: قاعدة الاختصار (ش^{3}).

ويمكن أن نعطي هذه القواعد صورة خطاطة، المطة الأفقية فيها تشير إلى القاعدة التي تجيز الانتقال من اللزوم الموجود فوق المطة إلى اللزوم الموجود تحت المطة:

التخفيف: ق ⊢ ل
م، ق ⊢ ل

المبادلة: ق، م، ن ⊢ ل
ق، ن، م ⊢ ل

الاختصار: ق، م، م ⊢ ل
ق، م ⊢ ل

(ب) عندما يكون الاشتقاق مقبولا، أي مطابقا لخطاطة اشتقاق (سنتحدث عنها فيما بعد)، فإنه يبقى مقبولاً، إذا أضفنا مقدما واحداً أو عدة مقدمات، في آن واحد، إلى إحدى مقدماته وإلى نتيجته: قاعدة الإضافة بالنسبة إلى الاشتقاقات (ش[4]).

وقواعد الاشتقاق بمعنى الكلمة (أو القواعد الإجرائية)، علاوة على وظيفتها كقواعد، تستعمل لتثبيت معنى مختلف العوامل. وفعلا فلكل عامل منها قاعدتان، إحداهما لإدراج العامل في المقدم، والأخرى لإدراجه في تالي اللزوم. وسنشير إلى هاتين القاعدتين برمز العامل المعني متبوعا بالحرف «م» إن قصدنا إدراجه في المقدم، وبالحرف « ت » إن قصدنا إدراجه في التالي. ويعبر عن هذه القواعد بخطاطات تسمى خطاطات الاشتقاق والتي تصف الطريقة التي يمكننا بها أن ننتقل من عبارة إلى أخرى. وهي تتركب من لزوم واحد أو عدة لزوميات بصفتها مقدمات مفصولة بمعطة أفقية عن اللزوم الذي تجيزه الخطاطة والذي هو نتيجة الاشتقاق. وكل صورة استدلالية مطابقة لإحدى خطاطات الاشتقاق، هي صورة لاستدلال صحيح.

قاعدة إدخال العطف « ∧ »

في المقدم	في التالي
(∧ م) ق ⊣ ل ق ⊣ ل	(∧ ت) ق، ⊣ ل
ق ∧ م ⊣ ل م ∧ ق ⊣ ل	⊣ ق ∧ ل

إن صورتي القاعدة (∧ م) يمكن ردها إلى صورة واحدة إذا ما لا حظنا أن المتغير «م» المدرج بالعطف يمكن أن يكون هو المتغير الأول، أو المتغير الثاني للعطف. إن هذه القاعدة (∧ م) تجيز الانتقال من المقدمة التي صورتها « ق⊣ل » والمفترض أنها حاصلة، إلى النتيجة « ق ∧ م ⊣ ل» وهذا يعني أنه إذا كانت « ل » ناتجة عن « ق »، فمن باب الأولى أن تكون ناتجة من « ق ∧ م ». وأما القاعدة (∧ ت) فهي تعني أنه إذا كان لدينا في آن واحد، مقدمة صورتها «⊣ق» ومقدمة أخرى صورتها «⊣ل» فإنه يمكن إثبات النتيجة التي صورتها «⊣ق ∧ ل».

قاعدة إدخال الفصل « ∨ »

في المقدم	في التالي
(∨ م) ق ⊣ ل ، م ⊣ ل	(∨ ت) ⊣ ق ⊣ ل
ق ∨ م ⊣ ل	⊣ ق ∨ ل ⊣ ق ∨ ل

إن صورتي القاعدة (∨ ت) تستدعي نفس الملاحظات التي استدعتها القاعدة (∧ م). فالقاعدة (∨ م) تعني أنه إذا كان لدينا مقدمة صورتها « ق⊣ل»، وكان لنا في نفس الوقت مقدمة صورتها «م ⊣ ل»، كان لنا أيضا نتيجة صورتها « ق ∨ م ⊣ ل». والقاعدة (∨ ت) تجيز الانتقال من المقدمة «⊣ ق» أو من المقدمة «⊣ ل» إلى النتيجة « ⊣ ق ∨ ل ».

قاعدة إدخال الاستلزام « ⊂»

في المقدم	في التالي
(⊂ م) ⊣ ق، ل م	(⊂ ت) ق ⊣ ل
ق ⊂ ل ⊣ م	⊣ ق ⊂ ل

إن القاعدة (⊂ م) ينبغي تأويلها بالطريقة التالية: إذا علمنا أنه عن «ل» تنتج «م»، وإذا كان لنا من جهة أخرى « ق »، فإنه من «ق ⊂ ل » ينبغي أن تنتج «م»، والقاعدة (⊂ ت) تؤول إلى إثبات أنه إذا كان من المقدم « ق » ينتج التالي « ل » فإنه يوجد استلزام من «ق» إلى «ل». وهذا يعني أن علاقة الاستلزام التي يعبر عنها العامل « ⊂ » ليست أقوى من علاقة اللزوم التي يعبر عنها الرمز «⊣». لكن الخطاطة (⊂ ت) لا تجيز بتاتا أن نقول إن العلاقتين متكافئتان[1].

---

(1) ليس من اللازم أن يكون لدينا قواعد خاصة بالتكافؤ، لأن التكافؤ يؤول إلى عطف استلزامين (ق⊂ل) ∧ (ل ⊂ ق).

قاعدة إدخال النفي « ~ »

في المقدم	في التالي
(~م) ق ⊣	(~ت) ق̲ ⊣ ك
~ ق̲ ⊣ ك	⊣ ~ ق̲

وباعتبار الرمز « ك » يشير إلى القضية الكاذبة (أو إلى المحال) فإن القاعدة (~ م) تعني أننا إذا كنا برهنا «⊣ ق »، فإنه من نفي « ق̲ » تنتج قضية كاذبة، والقاعدة (⊂ ت) تعني أنه إذا كانت من « ق̲ » تنجم قضية كاذبة، فذلك لأن « ق̲ » كاذبة، أو أن لدينا « ~ ق» وهو نفس الشيء.

وإلى قاعدتي النفي اللتين تبنيناهما منذ حين، يجب أن نضيف قاعدتين أخريين تكسران التناظر التام في نسق القواعد، لكنهما لازمتان للحصول على نسق منطق كلاسيكي ذي قيمتين. فإذا اقتصرنا على القاعدتين السابقتين وحدهما، كان لنا منطق مقيد (يسمى منطق الحد الأدنى) logique minimale لا يمكننا فيه أن نبرهن قانون الثالث المرفوع «⊣ق v ~ ق » ولا المبدأ الذي يقول (من الكذب يلزم كل شيء) ex falso sequitur quodlibet،ولا القوانين التي بالتالي تشتق منه، مثل قانون النفي المزدوج «⊣≡ ~~ق ». والقاعدتان اللتان تلزم إضافتها هما التاليتان:

(ن) ~ ق̲ ⊣ ق̲	(ك) ⊣ ك
⊣ ق	⊣ ق̲

إن قاعدة (ن) تعني : إذا نجم من نفي عبارة إثباتها، فإن العبارة يمكن إثباتها بلا قيد ولا شرط، والقاعدة (ك): تعني أنه إذا أثبتنا عبارة محالة جاز لنا أن نثبت أي عبارة قضوية[1].

---

(1) هذه القاعدة تكافئ المبدأ الكلاسيكي القائل: من الكذب يلزم كل شيء ex falso sequitur quodlibet.

والملاحظ أنه في مختلف القواعد التي قدمنا عنها خطاطاتها، لا توجد إلا لزوميات ذات مقدم واحد أو بدون مقدم. لكننا قلنا إن اللزوم يمكن أن يكون له عدة مقدمات، وللحصول على لزوميات ذوات عدة مقدمات، يجب اللجوء إلى قاعدة الجمع الخاصة بالاشتقاق (ش 4). التي وضعناها في الفقرة السابقة[1]. وبتطبيقها على خطاطة (∧ م) وخطاطة (∧ ت) نحصل مثلا على الخطاطتين الجديدتين.

ق، ق ⊣ ل	ق ⊣ ق، ل ⊣ ل
ق، ق ∧ م ⊣ ل	ق، ل ⊣ ق ∧ ل

3- برهنة بعض المبرهنات

وابتداء من القواعد التي ذكرناها، يمكننا أن نبرهن جميع مبرهنات حساب القضايا في المنطق الكلاسيكي. والطريقة سهلة نسبيا : نجعل في صورة لزوم أولي، بديهية مطابقة للخطاطة الوحيدة من البديهيات المتبناة في النسق. ثم ندرج في هذه العبارة الأولية العامل أو العوامل التي تتكون منها المبرهنة المراد برهنتها، وذلك بالذهاب من الأضعف إلى الأقوى، وبما أنه ليس هناك إلا قاعدة واحدة لإدراج عامل في المقدم، وقاعدة واحدة، لإدراجه في التالي (باستثناء النفي)، فإن القاعدة التي يتعين استعمالها في كل مرحلة من مراحل الاشتقاق هي قاعدة من السهل العثور عليها نسبيا عندما يتدرب الإنسان على ذلك.

ونقترح على سبيل التدريب برهنة بعض المبرهنات من مبرهنات منطق القضايا، وبشيء من الاهتمام يستطيع القارئ نفسه أن يقوم ببرهنة أي مبرهنة أخرى حسب اختياره، وهذه البرهنات تتمثل في صورة سلسلة من اللزوميات conséquences بمعناها الاصطلاحي الذي جعلناه لهذه الكلمة :وكل واحد من اللزوميات المشار إليه برقم بين معكوفين على اليمين يقوم بدور المقدمة بالنسبة إلى اللزوم الذي يوجد تحته ويقوم مقام النتيجة، وننتقل من لزوم إلى لزوم آخر وذلك بتطبيق إحدى قواعد الاشتقاق (قاعدة

(1) بعض المؤلفين يضعون منذ الوهلة الأولى خطاطات اشتقاق ذوات مقدمات متعددة. وإذا كنا لم نفعل ذلك فمن أجل التسهيل فقط.

إجرائية أو بنيوية) التي يشار إليها بواسطة رمزها الموضوع على يسار الجدول. ويمكن استعمال المقدمة الواحدة عدة مرات أثناء البرهنة، واللزوم النهائي هو التعبير عن المبرهنة المراد برهنتها.[1]

- برهنة: ⊢(ق ∨ (ق ∧ل)) (⊃ق)

[1] ق ⊢ ق	بديهية
[2] (ق∧ل) ⊢ ق	بواسطة (∧ م)
[3] (ق) ∨ (ق∧ل) ⊢ ق	بواسطة (∨ م) مع [1] و[2]
[4] ⊢ (ق ∨ (ق∧ل)) ⊃ ق	بواسطة (⊃ ت)

شرح مراحل هذه البرهنة. ـ نضع البديهية « ق ⊢ ق ». ولكي ندرج في مقدمها عامل العطف حتى نحصل على الحجة (ق ∧ ل)، فإننا نطبق القاعدة(∧ م) وبإعطاء «ق» و«ل» صورة « ق » و«ه» صورة « ل »: وبهذا نحصل على اللزوم [2]. ثم ولإدراج عامل الفصل في مقدم العبارة [2] فإننا نستعمل القاعدة (∨ م) جاعلين العبارتين [1] و[2] مقدمتين، وبإعطاء «ق» صورة « ق »،«ل» صورة « ق » و«ه» صورة (ق∧ل)،فإننا نحصل على اللزوم [3]. والقاعدة (⊃ت) تجيز تحويل هذا اللزوم إلى الاستلزام المطابق له: ولهذا الغرض يجب أن نعطي «ق» الصورة (ق ∨ (ق ∧ ل)) و«ل ل» صورة «ق».وبهذا نحصل على المبرهنة الموضوعة للبرهنة: ⊢(ق ∨ (ق ∧ ل)) (⊃ ق).

ونذكر بأنه إذا كنا أمام لزوم لا مقدم له كما هو الحال هاهنا، فإن معنى هذا أنه يمكننا أن نثبت تالي اللزوم دون قيد أو شرط. فالعبارة ⊢ (ق ∨ (ق ∧ ل) (⊃ ق)، الصادقة من دون شرط أو قيد هي إذن قانون منطقي.

ـ برهنة «حالة الوضع» modus ponens: ⊢ (ق ∧ (ق ⊃ ل)) ⊃ل.

(1) نذكر مرة أخرى بأن الحروف « ق »،« ل »،« م » في خطاطات القواعد تشير إلى عبارات قضوية أيا كانت، وبالتالي يمكنها بحساب المقام أن تمثل متغيرا بسيطا أو عبارة قضوية مركبة « ق ∧ ل »،« ق ∨ ل »...

[1] ق ⊣ ق [2] ل ⊣ ل	بديهيتان
[3] ق، (ق ⊂ ل) ⊣ ل	بواسطة (⊂ م) مع [1] و[2]
[4] ق، (ق ⊂ ل) ∧ ق ⊣ ل	بواسطة (∧ م)
[5] ق ∧ (ق ⊂ ل)، (ق ⊂ ل) ∧ ق ⊣ ل	بواسطة (∧ م)
[6] ق ∧ (ق ⊂ ل) ⊣ ل	بواسطة (ش 3)
[7] ⊣ (ق ∧ (ق ⊂ ل)) ⊂ ل بواسطة (⊂ ت)	

شرح. ـ نضع « ق ⊣ ق » [1] و« ل ⊣ ل » [2]، لكي ندرج المتغيرين (ق) و(ل) الموجودين في الصيغة التي نريد أن نبرهنها، ونطبق عليهما القاعدة (⊂ م)، وذلك من أجل إدراج عامل الاستلزام في المقدم. ولهذا الغرض نعطي «قـ» صورة « ق » و«لـ» و«مـ» صورة «ل» لكن بما أن اللزوم [1] مقدما، بينما في خطاطة القاعدة (⊂ م) ليس للمقدمة الأولى مقدم، فإن هذا المقدم، وفقا للقاعدة (ش 1) يجب أن نستعيده في اللزوم [3] كفرض أو مقدم إضافي. وبهذا يكون لدينا لزوم له مقدمان تفصل بينهما فاصلة: «ق، (ق⊂ل)⊣ ل». والسطران [4] و[5] تم الحصول عليهما بتطبيق القاعدة (∧ م) على المقدم الثاني ثم على المقدم الأول في [3] على التوالي ـ بشرط أن نعطي كل مرة المتغيرات « ق »، « ل »، « م » الصور المناسبة للبرهنة. وبهذا نحصل على [5] التي تصبح بواسطة الاختصار (القاعدة ش 3) هي اللزوم [6]. ثم إن القاعدة (⊂ ت) بإدراجها الاستلزام في المقدم تجعل العبارة مستقلة عن كل مقدم وتجعل الصيغة «⊣ (ق ∧ (ق ⊂ل)) قانونا منطقيا.

برهنة قانون الثالث المرفوع: ق v ~ ق :

[1] ق ⊣ ق	بديهية	
[2] ق ⊣ ق v ~ ق	بواسطة (v ت) مع ق = ق ول = ~ ق	
[3] ق، ~ (ق v ~ ق) ⊣ ق v ~ ق	بواسطة (~ م) مع ق = ق v ~ ق	
[4] ~ (ق v ~ ق) ⊣ ~ ق	بواسطة (~ ت) مع ق = ق	
[5] ~ (ق v ~ ق) ⊣ ق v ~ ق	بواسطة (v ت) مع ق = ق، ل = ~ ق	
[6] ⊣ ق v ~ ق	بواسطة (ن) مع ق = ق v ~ ق	

إن برهنة هذا القانون يتطلب عددا من الدورات ـ المراحل [3]، [4]، [5] ـ من أجل أن نحذف من اللزوم [2] المقدم ق، ويمكن التوصل إلى تحديد هذه المراحل بملاحظة أن العبارة «⊣ق v ~ » لا تمكن برهنتها بالقاعدة (v ت)، لأنه ليس كل من « ق » و« ~ ق » بديهية، ولا يمكن كذلك برهنتها ابتداء من البديهيات، ولكن بواسطة القاعدة (ن)، فإن «⊣ق v ~ » يمكن أن ينجم من المقدمة « ~ (ق v ~ ق) ⊣ ق v ~ » ـ وهذه بدورها بواسطة (v ت) إما من المقدمة «⊣ق» وإما من المقدمة «⊣ ~ ق» مع زيادة مقدم إضافي «~(ق v ~ ق)» وهكذا نتوصل بالتدريج إلى تحديد مختلف مراحل البرهنة. والملاحظ في هذا المثال أن خطاطات القواعد التي طبقت على مختلف المراحل، قد طبقت دائما مع زيادة مقدم إضافي (القاعدة ش 4).

-برهنة قانون التوزيع: (ق v (ل Λ م)) ⊂ (ق v ل) Λ (ق v م):

[1] ق ⊣ ق، [2] ل ⊣ ل، [3] م ⊣ م	بديهيات.	
[4] ق ⊣ (ق v ل)	بواسطة (v ت) ابتداء من [1]	
[5] ق ⊣ (ق v م)	بواسطة (v ت) ابتداء من [1]	

[6] (ل Λ م) ⊣ ل بواسطة (v م) ابتداء من [2]
[7] (ل Λ م) ⊣ (ق v ل) بواسطة (v ت) ابتداء من [6]
[8] ق v (ل Λ م) ⊣ (ق v ل) بواسطة (v م) ابتداء من [4] و[7]
[9] (ل Λ م) ⊣ م بواسطة (Λ م) مع [3]
[10] (ل Λ م) ⊣ (ق v م) بواسطة (v ت) مع [9]
[11] (ق v (ل Λ م)) ⊣ (ق v م) بواسطة (v م) مع [5] و[10]
[12] (ق v (ل Λ م) ⊣ (ق v ل) Λ (ق v م) بواسطة (v ت) مع [8] و [11] وواسطة (ش 3).
[13] ⊣ (ق v (ل Λ م) ⊂ (ق v ل) Λ (ق Λ م) بواسطة (⊂ ت)

وعلى الرغم من أن برهنة هذه المبرهنة théorème طويلة نوعا ما، فليس فيها صعوبات خاصة. وبالفعل فإننا في أول الأمر ندرج عامل الفصل في التالي في الصورتين اللتين يتمثل فيهما، وهما «ق v ل» و«ق v م». ثم ندرج على التوالي عامل العطف وعامل الفصل في المقدم، وذلك من جهة مع « ق v ل » كتال، ومن جهة أخرى مع « ق v م ». والقاعدة (Λ ت) تسمح أخيرا بأن نجمع بالعطف التاليين « ق v ل » و« ق v م ». وفي الأخير لا يبقى إلا أن نطبق القاعدة (⊂ ت) للحصول على لزوم لا مقدم له، أي لزوم مقبول بدون قيد ولا شرط.

وعلينا أن نلاحظ أن هناك في الغالب عدة كيفيات لإجراء برهنة من البرهنات حسبما نبدأ بإدراج العامل في هذا القسم أو ذاك في المقدم أو في هذا الجزء أو ذاك من التالي.

ولا يمكننا في حدود هذا الكتيب أن نعدد الأمثلة. ولنقل فقط إن طريقة الاستنتاج الطبيعي تمكننا من أن نبرهن جميع القوانين المنطقية لحساب القضايا [1] ونذكر علاوة على

(1) يوجد فيها عدة قوائم في كتاب:

J. Dopp, Logiques construites par une méthode de déduction naturelle. LOUVAIN – PARIS, 1962.

القوانين التي تمت برهنتها، أشهرها:

- قانون عدم التناقض: ⊢ ~ (ق ∧ ~ ق)،

- قانون النفي المزدوج: ⊢ ق ⊃ ~ ~ ق. ∧ ~ ~ ق ⊃ ق،

- قانون عكس النقيض: (ق ⊃ ل) ⊃ (~ ل ⊃ ~ ق)،

- قانون ثنائية العطف والفصل (= قانونا مرغن):

⊢ (ق ∧ ل) ⊃ ~ (~ ق ∨ ~ ل) وعكسها

⊢ (ق ∨ ل) ⊃ ~ (~ ق ∧ ~ ل) وعكسها

- قانون القياس الاستثنائي المتصل:

⊢(ق ⊃ ل) ∧ ق) ⊃ ل: حالة الوضع

⊢(ق ⊃ ل) ∧ ~ل) ⊃ ~ ق: حالة الرفع

- قانونا القياس الاستثنائي المنفصل: ((ق ∨ ل) ∧ ~ ق) ⊃ ل

- قانونا التوزيع في ∧ وفي ∨

⊢ (ق ∨ ل) ∧ م ≡ (ق ∧ م) ∨ (ل ∧ م)

⊢ (ق ∧ م) ∨ ل ≡ (ق ∨ ل) ∧ (م ∨ ل)

3- محاسن الطريقة وخصائصها

إن لطريقة الاستنتاج الطبيعي عدة محاسن لها قيمتها بالنسبة إلى الطريقة المصادراتية. وأقربها هو أن طريقة السير في برهنة إحدى المبرهنات، هي أسهل في العثور عليها وأقصر من طريقة المصادريات. وهذا لأن جميع البرهنات تجري ابتداء من خطاطة وحيدة من البديهيات وبتطبيق القواعد الأولية وحدها، وهي قليلة ولكل واحدة منها وظيفة معينة تماما. وأمّا

في الطريقة المصادراتية، فإن البرهنات ابتداء من البديهيات والقواعد الأولية،تتطلب في الغالب عدة التواءات شاقة، وإذا أردنا عدم الدخول في حسابات طويلة جدا،وجب علينا أن نعتمد باستمرار على قواعد مشتقة ومبرهنات سبقت برهنتها.

وثاني محاسن هذه الطريقة هو أنها تستغني عن كل قاعدة في التعويض، وهذا من شأنه أن يخفف الحساب إلى حد كبير. وهذا التخفيف الذي لا يظهر بشكل واضح في حساب القضايا الذي ليس فيه إلا نوع واحد من المتغيرات (المتغيرات القضوية)، هو ذو قيمة كبيرة جدا في حساب المحمولات الذي تخضع فيه قواعد التعويض لعدة قيود من أجل أن نعمل حسابا لمختلف أنواع المتغيرات والأسوار.

وفي الأخير، فإن طريقة الاستنتاج الطبيعي تسمح بالتطرق بسهولة إلى بعض المناطق غير الكلاسيكية هي أخف من المنطق الكلاسيكي، ولاسيما « منطق الحد الأدنى minimal» الذي وضعه (جوهنسن) Johansson، «والمنطق الحدساني» الذي وضعه (بروور - هيتينغ) Brouwer – Heyting [1] اللذين تعبر عنهما بصعوبة طريقة القيم الصدقية. إننا نحصل على «منطق الحد الأدنى» بإلغاء الخطاطتين (ن)و(ك)،و على «المنطق الحدساني»بإلغاء الخطاطة (ن) فقط.

ونلاحظ أيضا أن الطريقة المعنية تناسب تماما دراسة بعض المشاكل النظرية الشارحة métathéoriques (التي ستتناولها في الباب الخامس).فكل القواعد–و قد رأينا أنها تمثل أساس النسق ذاته– قد وقع التعبير عنها باللغة الشارحة métalangue.و إدراج اللغة الشارحة في اللغة يسمح للنسق بأن يعبر عن بعض خصائصها وبأن يدرسها وخاصة عدم التناقض والبت décision.[2]

(1) في «منطق الحد الأدنى»يعتبر مبدأ(من الكذب يلزم كل شيء) ex falso sequitur quodlibet و«الثالث المرفوع» غير قابلين للبرهنة. وفي «المنطق الحدساني» فإن «الثالث المرفوع» فقط غير قابل للبرهنة.

(2) للتفريق بين «اللغة» و «اللغة الشارحة» راجع الباب الأول، ص19.

الباب الثالث

بنية القضايا

في منطق القضايا كما عرضناه منذ حين، تمثل المتغيرات «ق»، «ل»، «م»،... قضايا كانت، ومعتبرة على وجه الإجمال بقطع النظر عن بنيتها الداخلية، وتمثل العوامل «∧»، «∨»، «⊃» علاقات بين مثل هذه القضايا «غير المحللة». لكن في أغلب استدلالاتنا تكون العلاقات بين القضايا مترافقة مع علاقات مرتبطة بالبنية الداخلية للقضايا. ولهذا في القياس «إذا كان كل أ هو ب، وكل ج هو أ، فإن كل ج هو ب» تكون النتيجة انطلاقا من المقدمتين ناجمة من العلاقات بين الحدود أ وب وج كما هي واردة في القضيتين الكليتين (كل أ هو ب) و(كل ج هو أ). كما أن الاستدلال الذي به، من «س > ص» و«ص>هـ» نستنتج أن «س > هـ» يقوم على العلاقة التي في المقدمتين تربط الحدين (س) و(ص) من جهة و(ص) و(هـ) من جهة أخرى.

ومنطق الدوال أو المحمولات يتمثل موضوعه بالضبط في دراسة صور الاستدلالات التي «حللت» قضاياها التي تتركب منها، وذلك بطريقة معينة ميزنا داخلها بعض العناصر مثل الموضوع والمحمول أو حدي علاقة من العلاقات، وذلك بواسطة رمزية خاصة. إن هذا المنطق يشمل نظرية القياس التقليدية، لكننا سنرى أنه يتجاوزها كثيرا من حيث عدد وتنوع صور الاستدلال التي يسمح بإقامتها.

وقد يتساءل المرء لماذا نتطرق إلى دراسة هذا القسم من المنطق بعد دراسة منطق قضايا، في حين أن الكتب الدراسية الكلاسيكية تتبع عكس هذا الترتيب؟ لقد وجدنا قبل هذا فرصة الإشارة إلى أن منطق القضايا يمثل أهم أقسام المنطق، وهو القسم الذي تفترضه جميع الأقسام الأخرى بينما هو لا يفترض أي واحد منها. وسبب ذلك أن كل استدلال مهما تنوعت العلاقات التي يستعملها، يؤول دائما في نهاية المطاف إلى ترابط بين القضايا. وهذا يفسر كوننا في الباب السابق قد تمكنا من بناء منطق القضايا بكيفية مستقلة، في حين أننا من أجل بناء منطق الدوال نكون في حاجة إلى استعمال عوامل منطق القضايا بالإضافة إلى العوامل الخاصة به.

I - البنية الأولية للقضايا

وبما أن «منطق الدوال» يدرس ترابط القضايا التي وقع تحليلها، فإنه يتعين علينا أن ننظر، وفي سياق المنطق المعاصر، في كيفية القيام بهذا التحليل. وبعد هذا العمل التمهيدي فقط يمكننا أن نعرض هذا المنطق في صورة نسقية.

1- وجهة النظر القديمة والكلاسيكية:

سنعيد إلى الأذهان أولا وجهة النظر الكلاسيكية حول هذا الموضوع. ففي المنطق التقليدي ترجع كل القضايا البسيطة أيا كان تنوعها في عبارتها اللفظية، إلى نمط وحيد تمثله الصيغة الحملية (كذا هو كذا). وتتكون هذه الصورة في جوهرها، من «موضوع» وظيفته أن يشير إلى «الشيء» أو إلى «الأشياء» التي نتحدث عنها، ومن «محمول» يعبر عن صفة خاصة بالشيء أو الأشياء التي يشير إليها الموضوع، وأما الضمير الذي ينحصر دوره في ربط الموضوع بالمحمول، فإنه يعتبر مجرد رابطة.

لكن إذا كانت خطاطة (كذا هو كذا) تناسب تماما القضايا الحملية (أو الملازمة d'inhérence) مثل (سقراط فان)، وإذا كانت تتكيف أيضا، ولو بشيء من التصنع، مع القضايا «الفعلية» (زيد يتجول = زيد متجول) ومع الأقوال غير المشخصة الفاعل Impersonnel (إنها تمطر = il pleut المطر نازل)، فإن الأمر ليس كذلك عندما يتعلق بالقضايا «الوجودية». وفعلا عندما نعطي القضية (زيد موجود) Pierre existe صورة (زيد متصف بالوجود) Pierre est existant لإدخالها في خطاطة (كذا هو كذا) فإننا نجعل assimile الوجود محمولا بنفس المعنى الذي نجعله لأية صفة من الصفات، في حين أن الوجود ليس تعيينا détermination للموضوع بل هو يعبر عن نفس «فعلية» actualité الموضوع وتعييناته المحتملة[1].

---

(1) ومع ذلك ينبغي أن نلاحظ أن هذه الفروق من اختصاص الميتافيزياء دون المنطق. لأن المنطق عندما يرجع القضية الوجودية إلى الصورة الحملية (كذا هو كذا) فهو لا يقصد افتراض أي شيء يتعلق بطبيعة الوجود الواقعي.

إن الرد إلى خطاطة (كذا هو كذا) إنما يثير صعوبات مع القضايا العلاقية التي هي من نوع (س) تساوي (ص)، [و الجزائر أكبر من البليدة] حيث المحمول - أو ما يقوم مقامه - يذكر شيئا من نفس الطابع المنطقي الذي للشيء الذي يشير إليه الموضوع. ومما لا شك فيه أنه يبقى صحيحا من الناحية المنطقية أن نؤول القضايا العلاقية على أساس أنها حملية معتبرين العبارتين (تساوي ص) و(أكبر من البليدة) كلا منهما يقوم بدور المحمول العلاقي. لكنه يصبح من المستحيل أن نبرر بواسطة القضايا الحملية أبسط الاستدلالات الرياضية، من مثل الاستدلال التالي : (إذا كانت س =ص، وص=هـ فإن س =هـ). وبالفعل فإننا عندما ندمج الشيء (ص) في المحمول (يساوي «ص») للحصول على خطاطة (كذا هو كذا) فإننا نحرم أنفسنا من استخلاصه فيما بعد لجعله موضوعا لحمل جديد.

إن هذا العجز في المنطق الحملي عن تبرير الاستدلالات العلاقية هو من دون منازع، أحد أكبر عيوب المنطق التقليدي ولم يغفل عنه بعض المنطقيين في الفترة الكلاسيكية. ومع ذلك ففي النصف الثاني من القرن التاسع عشر فقط تبين أنه يجب الإسراع إلى تدارك ضيق المنطق الحملي بتزويجه «بمنطق علاقات» يستجيب لحاجات الرياضيات والعلوم في غمرة تطورها.

2- وجهة النظر الحديثة:

وأول من سلك هذا الطريق سنة 1874 هو الإنكليزي (أ. د ي مرغن[1]) A. De Morgan: فبين أهم الخصائص المنطقية للعلاقات، ودشن بموازاة لحساب الأصناف (أو المحمولات) حسابا خاصا بالعلاقات. وقد استأنف وطور عمله (بيرس) Peirce، ثم (شرودر) Schroder الذي نشر سنة 1895 أول عرض نسقي شامل لحساب العلاقات بإعطائه صورة النظرية المستقلة[2]. ومع ذلك فإن منطق العلاقات لم يدمج في المنطق بهذا الوجه. وبالفعل ومع أعمال (فريغه) Frege فإن الأبحاث أخذت مسلكا آخر هو الذي رجح في نهاية المطاف، وبما أن ضيق المنطق الكلاسيكي قد ارتبط بصلابة الخطاطة الحملية

(1) CF. Formal logic, Londres, 1847.

(2) CF. Algebra und logik der relative, Leipzig, 1895.

(كذا هو كذا)، فقد وجب العثور من أجل تحليل القضايا، على بنية أخرى وأعم يمكنها أن تتكيف مع مختلف أنواع القضايا دون أن تزيل عنها نوعيتها.

وبالبحث في هذا الطريق كان (فريغه) Frege أول من خطرت بباله فكرة نقل مفهوم «الدالة»من الرياضيات إلى المنطق. وهذا المفهوم الذي أخذه ونشره (ب. راسل) B. Russell أصبح فيما بعد جزءاً لا يتجزأ من لغة المنطق إلى درجة أنه أعطى اسمه لمنطق القضايا «المحللة» الذي غالبا ما يسمى «منطق الدوال القضوية» أو «منطق الدوال» فقط[1]. وبواسطة هذا المفهوم أمكن وضع حساب العلاقات في مكانه ضمن المجموعة التي يتكون منها المنطق الحديث.

3- الدالة القضوية:

إن الدالة «د(س)» أو «د(س ص)» في الرياضيات هي عبارة جبرية قيمتها العددية تابعة للقيمة المعطاة للمتغيرات التي تمثل حججها. والدالة في ذاتها مثلا «$3س^2 + س + 1$» هي في أساسها غير معينة، وعدم التعيين هذا لا يمكن إزالته إلا بتعويض متغيرها أو حجتها، وهي هنا المتغير «س» بقيمته العددية. وبالمثل فإن «الدالة القضوية» هي عبارة معناها غير محدد وقيمتها الصدقية غير معينة، لأنها تحتوي في مقولها على متغير أو عدة متغيرات. لكن العبارة المعنية تصبح قولا ذا دلالة وبالتالي قضية صادقة أو كاذبة عندما نعوض المتغير أو المتغيرات التي تحتويها بلفظة تشير إلى شيء شخصي أو مستعمل بمعنى شخصي. وعندئذ فإن قيمتها (التي لا يمكن أن تكون إلا الصدق أو الكذب في سياق المنطق الثنائي) تكون تابعة للدلالة التي نعطيها المتغيرات[2]. وبما أنه يوجد في الرياضيات دوال ذوات حجة أو عدة حجج حسب احتوائها على متغير واحد أو عدة متغيرات، فكذلك يمكن أن يكون لدينا في المنطق دوال قضوية ذوات متغير واحد أو متغيرين أو ثلاثة متغيرات $(ع)_ن$ من المتغيرات الشيئية.

---

(1) بعض المؤلفين يسمونه كذلك «منطق المحمولات» وكذلك «منطق الدوال الحملية».

(2) إن مثل هذه المتغيرات تسمى «متغيرات شيئية» لحلولها محل شيء شخصي: زيد، هذه المنضدة – أو باعتباره شخصا مثل «العدد 5».

ولنوضح هذه المفاهيم المجردة نوعا ما ببعض الأمثلة. ولننظر قبل كل شيء في هذا القول: (س حمراء) ولنفرض أنه حصل من القضية التالية: (هذه الوردة حمراء) بوضعنا المتغير «س» في مكان الموضوع. وبالعمل بنفس الطريقة، فإن قولنا: س قريب ص، يمكن اعتباره مطابقا للقضية: زيد قريب بكر، على أساس أن المتغير (س) و(ص) وضعا موضع الاسمين الشخصيين (زيد) و(بكر).

فالقولان (س حمراء) و(س قريب ص) لم يعودا قضيتين ولو أن لهما صورتها: لأن وجود متغير واحد أو متغيرين يمنعهما من أن يكون لهما دلالة معينة ويترك قيمتهما الصدقية غير معينة. لكن يكفي أن نعوض المتغيرات بثوابت، أي بحدود تشير إلى شيء معين[1] لكي تصبح هاتان الصورتان القضويتان قضيتين صادقتين أو كاذبتين.

وإذا ما أمعنا في التجريد، أمكننا في هذين القولين أن نشير بالحرف «د» إلى المحمول (حمراء) أو إلى العلاقة (قريب)، فنحصل على العبارتين «د(س)» و«د(ص)»، اللتين تعنيان عل التوالي، أولهما أن المحمول «د» الذي يمكن أن نسميه محمولا «مطلقا» مقبول على شيء ما هو «س» (أو على أشياء كثيرة معا)، وثانيتهما أن علاقة ما ويمكن اعتبارها (محمولا علاقيا)، مقبولة على شيئين متمايزين «س» و«ص». فالعبارتان «د(س)» و «د(س ص)» تعملان عمل «الدالتين»: فبالنسبة إلى بعض قيم متغيراتهما فإنهما يعطيان قضية (صادقة) (و هذه القيم تحقق أو تصدق الدالة)، وبالنسبة إلى قيم أخرى فإنهما تعطيان قضية كاذبة. وهنا تسميان «دالتين قضويتين»: ويقوم فيهما الرمز «د» بدور «الدالة»، بمعنى أنه يشير إلى شيء مستقر وإلى «بنية» ليست موضحة بغير ذلك، لكنها محددة بالنسبة إلى عبارة معينة. والمتغيران «س» و «ص» اللذان لولاهما لكانت الدالة ناقصة يقومان فيها مقام «الحجتين». والدالة الأولى التي لا تتطلب إلا متغيرا شيئيا لتصبح قضية، هي دالة قضوية ذات حجة واحدة، والدالة الثانية التي تتطلب متغيرين شيئين هي دالة قضوية ذات حجتين اثنتين. ويمكن الحصول على دالة قضوية ذات ثلاث حجج «د(س ص هـ)» من قولنا: «أ موجود بين ب وج، على أساس أن العلاقة «موجود بين» تحتاج إلى ذكر ثلاثة أشياء لكي تعطي قضية ذات معنى.

---

(1) مع ملاحظة أن مجال الأشياء التي يمكن إحلالها محل متغير من المتغيرات ليس في العادة أي مجال، بل إن معنى المحمول يحدده.

إن هذه الأمثلة كافية لكي تبين كيف أنشأ المنطقيون المحدثون مفهوم الدالة القضوية وما هو المعنى الذي ينبغي إعطاؤها إياه. وبهذا المفهوم أصبح لدى المنطق المعاصر للتعبير عن مختلف صور القضايا خطاطة أكثر مرونة من الخطاطة الحملية (كذا هو كذا). والقضايا الحملية الكلاسيكية من ضرب (سقراط فان) تكتسي صورة دالة قضوية ذات حجة واحدة، والقضايا العلاقية صورة دالة ذات حجتين اثنتين أو عدة حجج، حسبما تكون طبيعة العلاقة (ثنائية أو ثلاثية...إلخ). والقضايا الفعلية تتكيف دون أية صعوبة مع الخطاطة الجديدة بسلوكها مسلك الدوال ذوات الحجة الواحدة (زيد يدخن الغليون) أو الحجج المتعددة (زيد يراسل بكرا) حسبما تكون العبارة الحملية التي هي هاهنا فعل متعد[1] محمولة على شخص واحد (زيد) أو شخصين (زيد وبكر).

وإلى هنا فإننا لم نتعرض إلا إلى قضايا شخصية. وهل الخطاطة الدالية «د(س)»، و«د(ص)» حيث «س» و«ص» متغيران شيئيان شخصيان، لا تسمح لنا بأن نعبر عن القضايا العامة الكلية والجزئية في المنطق الكلاسيكي؟

ففي القضية العامة: «الإنسان فان» فإن المسند إليه من حيث هو تصور، ليس مسندا إليه حقيقيا حاملا لتعينات، بل هو صفة. فلسنا في الحقيقة نقول الخاصية التي يقولها المحمول، على التصور الذي هو «الإنسان» بل على أفراده الذين هم الناس. فالتصور الذي هو «الإنسان» ينبغي اعتباره «دالة» على غرار المحمول «فان»، والدالتان لهما من جهة أخرى نفس الحجة. إذ كل شخص هو «إنسان» هو أيضا «فان». وبهذا الاعتبار ترتد القضية العامة إلى علاقة بين دالتين «د(س)» و «ر(س)». وسنرى فيما بعد (ص 89 من الأصل) كيف يؤول المنطق المعاصر هذه العلاقة حسبما يتعلق الأمر بالقضايا الكلية أو الجزئية، وما هي الوسيلة التي نعبر بها عن الكم في القضية؟

وتبقى القضايا الوجودية، فهل يمكن أن نكيف الخطاطة الدالية مع إثبات الوجود، إذا كان هذا الوجود الذي لا يصح حمله، لا يمكن التعبير عنه برمز الدالة؟ لقد لاحظنا

(1) لا بد أن نلاحظ أننا عندما نتحدث عن «المحمول» أو عن «العبارة الحملية» فإننا نعطي هذه الكلمات معنى عاما جدا: «فالمحمول» هو ما نثبته أو ننفيه عن شيء أو عدة أشياء. ولهذا نعتبر «العلاقة» نوعا من المحمول.

قبل هذا (§I، I) أن المنطق الكلاسيكي. برده جميع القضايا إلى الخطاطة الوحيدة (كذا هو كذا) كان يعتبر الوجود محمولا. وقد استطاع المنطق المعاصر أن يتخطى الصعوبة بأن ضم إلى مفهوم الدالة، مفهوم السور quantificateur، وبالنسبة إلى ما يهمنا، مفهوم «السور الوجودي» الذي رمزه هو «E» وهكذا فإن العبارة «(E) د(س)» تعني: «يوجد على الأقل س واحد بحيث إن س تصدق د».

ومن أجل إدخال القضايا الوجودية من نمط (زيد موجود) في هذه الخطاطة، فإنه يكفي أن نلاحظ أن كلمة (زيد) هي التي تقوم بدور «الدالة»، لأن الشخص الذي نثبت له الوجود لم يتلق حتى الآن تعيينا آخر غير حمله لاسم (زيد). والعبارة «(E) د(س)» يمكن تأويلها بالطريقة التالية: «يوجد على الأقل (س) واحد بحيث إن (س) هذا هو زيد».

I – البنية مع التسوير

لقد تحدثنا منذ قليل عن السور الوجودي عندما تحدثنا عن القضية الوجودية. ويبقى علينا أن نبين ما هو بصفة عامة معنى ودور الأسوار واستعمال المنطق المعاصر لها.

1- السور الكلي والسور الوجودي:

سننطلق من القولين التاليين المقتبسين من ميدان الرياضيات: «س^2 ≤ 0» و«س^2 =25». وفي هذه الصورة ينبغي اعتبارهما دالتين قضويتين، لأن وجود المتغير «س» بقدر ما لا نبين أن الأمر يتعلق بعدد، يترك القيمة الصدقية غير معينة.

لكننا إذا ما عوضنا «س» بأي عدد، حصلنا في الحالة الأولى على صيغة يقع تحقيقها دائما وفي الحالة الثانية على صيغة لا تحققها إلا قيمتان متقابلتان لـ «س»، وهما العددان +5 و-5. وعندئذ إذا ما كتبنا بدلا من الصيغتين الابتدائيتين:

بالنسبة إلى الأولى: أيا كان العدد س، فإن س^2 ≤ 0

وبالنسبة إلى الثانية: يوجد «سينان» بحيث س^2=25.

حصلنا في الحالتين على قضية «صادقة». الأولى قضية «كلية»، والثانية قضية «جزئية» أو «وجودية». وأما العبارتان « أيا كان س» و« يوجد سينان»، فتسميان، «سورين»: أيا كانت س (أو ما يكافئها بالنسبة إلى كل س)، هو السور « الكلي»، و« يوجد سينات» (أو ما يكافئها : بالنسبة إلى بعض « السينات»)، هو السور الوجودي[1]

وإذا ما تساءلنا الآن ماهو دور الأسوار، قلنا إنه يتمثل أساسا في كونها تحول الدالة القضوية إلى قضية دون أن نضطر من أجل هذا إلى تعويض متغيراتها بثوابت. وبعدئذ تسمح لنا أيضا بالتعبير عن القضايا العامة الكلية والجزئية، وعن قضايا أكثر تركيبا يمكن منها أن تركب الأسوار الكلية والوجودية بعدة كيفيات.

إن الطريقة عامة جدا ويمكن تطبيقها على أية دالة قضوية، لكنها إن كانت تعطي دائما قضية، فإن هذه القضية ليست دائما قضية صادقة. وإذا عدنا إلى الصيغة « $س^2 = 25$ » فلنسلط عليها السور الكلي. إننا نحصل على القول التالي: « بالنسبة إلى كل س، فإن $س^2 = 25$ » الذي هو قضية، أي قول جازم معين، لكنها قضية « كاذبة».

ولتسليط الضوء على دور الأسوار، اخترنا أمثلة مأخوذة من الرياضيات، لأن الرياضيات تستعملها بالفعل في الصياغة الصريحة لمبرهناتها. لكن يمكننا أن نأخذ أمثلة من ميادين أخرى : ولنفرض الدالة القضوية « د (س) » حيث « د » تعني «...كائن » فإذا وضعنا أنه : « بالنسبة إلى كل س، فإن س هو كائن »، كان لنا هاهنا، على الرغم من وجود المتغير« س ». قضية معينة، هي بالإضافة إلى ذلك، «صادقة»، إذ كل شيء شخصي أيا كان، هو كائن. وسنحصل دائما على قضية، لكن هذه المرة على قضية « كاذبة»، إذا كان « د » تعني «... إنسان » أو «... عدد أولي ». وبالمقابل فإن قولنا: « يوجد على الأقل س واحد بحيث إن س هو عدد أولي » هو قضية صادقة، ولا داعي لإظهار صدقه، إلى تعويض المتغير س

---

(1) إن تسمية السور بأنه « وجودي» الشائعة للإشارة بها إلى العبارتين: « توجد أفراد من س»، أو «بالنسبة إلى بعض أفراد من س»،قد توهم أن السور الكلي لا يثبت وجود شيء يصدق حجته. وهذا غير صحيح، ففي « بالنسبة إلى كل س، فإن $س^2 \geq 0$ يوجد أيضا إثبات لوجود شيء يصدق $س^2 \geq 0$. وإذا حصل كما سنرى فيما بعد (§3 II. ب) أن بعض القضايا الكلية لا تحمل قيمة وجودية، فليس ذلك بسبب السور الكلي، بل بسبب صورتها الاستلزامية.

بثابت، أي بعدد من الأعداد. بل إن فعلنا ذلك حصلنا على قول لا معنى له، بينما هو على حاله، ذو دلالة معينة، إذ هو يثبت وجود أشياء لها خاصية معينة هي كونها عددا أوليا.

ولنلاحظ في الأخير أنه إن كانت لدينا دالة ذات عدة متغيرات، وأردنا تحويلها إلى قضية وجب أن نضم سورا إلى كل متغيراتها التي هي حججها. فقولنا : «بالنسبة إلى كل عدد س، ص، هـ فإن س + ص = هـ»، وقولنا : « بالنسبة إلى كل س وكل ص، يوجد عدد هو هـ بحيث إن س + ص = هـ» هما قضيتان، لأن جميع متغيراتها « مقيدة» بسور، بينما قولنا : بالنسبة إلى كل س وكل ص، فإن س + ص = هـ، ليس قضية، لأن المتغيرين «س» و«ص» وحدهما مقيدان بالسور الكلي، بينما المتغير «هـ» باق على عدم تعيينه كمتغير. فهذه دالة قضوية يمكن أن تصبح قضيته،إما بأن نعوض «هـ» بثابت، والمقصود هنا باسم عدد، وإما أن نقرنه كذلك بسور.

لقد استعملنا حتى الآن للتعبير عن التسوير، العبارتين « بالنسبة إلى كل س» و «يوجد س واحد» المستعملتين في الرياضيات. أما المنطق المعاصر فقد تبنى الرمز « UU س» للسور الكلي والرمز «E س» للسور الوجودي.[1]

2- المتغيرات المقيدة والمتغيرات الحرة:

وحسبما سبق نرى أنه في الدالة القضوية يمكن أن يوجد فيها نوعان مختلفان من المتغيرات. فإذا ما رجعنا إلى المثال الأخير في الفقرة السابقة: بالنسبة إلى كل س وبالنسبة إلى كل ص، فإن س + ص = هـ »، فإنه ينبغي لنا أن نلاحظ من جهة، المتغيرين « س » و «ص » اللذين اقترن بهما السور الكلي، واللذين يكونان بذلك مندمجين في الدالة، ومن جهة أخرى، المتغير «هـ» المستقل عن كل سور. والمتغيرات من هذا الضرب الثاني، هي متغيرات «حرة» بمعنى أنه يمكن تعويضها بثابت شخصي، بينما المتغيران «س» و«ص» اللذان لم يعد يمكن تعويضهما بثابت هما متغيران «مقيدان». فالأسوار إنما تحول الدالة القضوية إلى قضية «بتقييد» المتغير أو المتغيرات التي تذكرها.

(1) إن بعض المؤلفين يضمرون السور الكلي، وبدلا من « (U س) د (س) » يكتبون « (س) د (س)». وبعضهم أيضا يستعمل «Ǝس » بدلا من « E س » للإشارة إلى السور الوجودي.

وكيف نفسر عملية التقييد هذه ؟ فلننطلق من الدالة ذات الحجة الواحدة «د (س)» ولنعوض المتغير «س» بثابت شخصي مختار في الميدان الذي تحدده الدالة «د»[1]. فإذا كانت $س^1$، $س^2$، $س^3$... نمثل مختلف ثوابت هذا الميدان،كان لنا على التوالي مثل ذلك من القضايا الشخصية الصادقة أو الكاذبة. وبمثل هذا العمل ومع افتراض أننا جبنا مجال أفراد «س» كله، يمكننا أن نعبر في قول واحد عن نتيجة جملة العمليات السابقة، فنقول : « بالنسبة إلى كل س، فإن س تصدق د، أو بشكل أخصر : «(∪س) د (س)». ففي هذا القول الذي هو قضية كلية، لم يعد المتغير « س » يقوم بدوره كمتغير، وهو القيام مقام مجموعة من الثوابت، وإمكان تعويضه بكل واحد منها. بل إن السور الذي يتصدرها يشير إلى أن هذا المتغير أصبح منذ الآن «مقيدا»: فبعدما جاب جميع ميدان الأشياء التي يمكن أن يحل محلها، فإنه لم يعد من الممكن أن يعوض بثابت.

إن التفريق بين متغير «حر» ومتغير «مقيد» مهم جدا. فمن جهة وعلى صعيد الرمزية والصيغ يستعمل هذان الضربان من المتغيرات لكي يصف أولها الدوال القضوية، وثانيهما، القضايا. «ويكفي» أن تحتوي العبارة على متغير «حر» لكي يجب اعتبارها دالة قضوية، ويجب «أن تكون جميع متغيرات القضية «مقيدة». لكي تكون قضية. ومن جهة أخرى وعلى صعيد العمليات، فإننا ننتهي إلى التباسات خطيرة إن نحن لم نفرق بينهما. ولهذا ينبغي أن نحتاط كثيرا في معالجة الصيغ عندما تختلط فيها المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة. ولهذا كانت قواعد الاستنتاج ولا سيما قواعد تعويض المتغيرات في منطق الدوال أكثر تعقيدا منها في منطق القضايا.

3- القضايا المقترنة بالأسوار

وبالتطرق قبل الأوان إلى الحساب الخاص بالدوال، سنقدم بعض القواعد في الرمزية تمكننا من التنبيه إلى تنوع العبارات التي يمكن تكوينها في نطاق هذا الحساب.

سنستعمل من الآن فصاعدا للإشارة إلى محمول «مطلق»، الرموز «أ»، «ب»، «ج»، «د»،... (= متغيرات محمولية)، وللإشارة إلى محمول «علاقي»، الرموز «ع»، «ف»، «ط»...

(1) راجع الهامش 1 في ص. 78 من الأصل.

(= متغيرات علاقية ثنائية)[1]، وللإشارة إلى شيء شخصي «س»، «ص»، «هـ»، «و»... (متغيرات شيئية). وسنعتبر الصيغ «أ س»، «ب س»،... «ع س ص»، «ف ص هـ»...[2] التي تطابق دوال قضوية ذات حجة واحدة أو حجتين قضايا شخصية [3]. وسنتحدث في الحالتين عن عبارة قضوية. كما سنعتبر عبارة قضوية كل صيغة حصلنا عليها من الصيغ السابقة، وذلك بتطبيق سور واحد أو عدة أسوار حسب الطريقة المشار إليها في الفقرات السابقة ـ وكذلك كل صيغة مركبة مبنية ابتداء من صيغة أبسط، باستعمال عوامل منطق القضايا وفقا للقواعد التي تحكم استعمالها.

(أ) القضايا العامة البسيطة ونفيها.

وإذا راعينا هذه القواعد حصلنا على سلسلة أولى من القضايا «البسيطة»، وذلك بتطبيق السورين «U س» و«E س» على العبارات من نمط «أ س» و«ع س ص»:

- القضايا الكلية: «U س أ س»، «U س U ص ع س ص»[4]

- القضايا البعضية: «E س ب س»، «E س E ص ع س ص»[5]

- القضايا البعضية المدرجة في الكلية: «U س E ص ع س ص»، «U ص E س ع س ص»[6]

(1) لن ندخل رموزا للعلاقات الثلاثية التي لن تصدى لها إلا تلميحا في إطار هذا الكتاب. ويمكن أن تكون هذه الرموز هي «ع 3»، «ف 3»،...

(2) لن نكلف أنفسنا بوضع المتغير أو المتغيرات الشيئية داخل أقواس إلا عندما يلجئنا إلى ذلك وضوح العبارة.

(3) في الصيغ «أ س»، «ب ص»،...«ع س ص»، «ف ص هـ»...تعتبر المتغيرات «س»، «ص»، «هـ» متغيرات «شخصية» فهي حالة محل شيء ليس له تعين آخر، لكننا نفترض فيه أننا إذا ماطبقنا عليه محمولا حصلنا على قضية صادقة أو كاذبة.

(4) ونقرأ: «بالنسبة إلى كل س، فإن س يصدق على أ»، و«بالنسبة إلى كل س وكل ص، فإن س وص (بهذا الترتيب) يصدقان على العلاقة ع».

(5) ونقرأ «بالنسبة إلى بعض س فإن س يصدق على ب»، و «بالنسبة إلى بعض س وبعض ص فإن س وص يصدقان على ع».

(6) ونقرأ «بالنسبة إلى كل س يوجد ص واحد، بحيث إن س وص يصدقان على ع» و«بالنسبة إلى كل ص، يوجد س واحد بحيث إن س وص يصدقان على ع».

- القضايا الكلية المدرجة في البعضية : «E س ں هـ ع س هـ»، «E هـ ں س ع س هـ»[1]

إن القضايا أعلاه هي أبسط القضايا العامة التي يمكن تصورها. لكن من الصعب التحقق منها وخاصة الكلية منها، وليس لهذا أي أهمية على الصعيد الصوري حيث يكفي أن تكون العبارة مبنية وفقا للقواعد حتى يكون إمكانها مقبولا. ومن الناحية العملية، فإن عموم هذه القضايا يكون محدودا عندما نضع أنفسنا في عالم معين من الأشياء. وهكذا في مجال الأعداد الصحيحة يتحقق قولنا: « بالنسبة إلى كل س، فإن س إما فردى وإما زوجي»، وفي المجال الفيزيائي: « بالنسبة إلى كل س، فإن س إما جسم حي وإما جسم جامد.»

ويمكننا أن ننشيء سلسلة ثانية من القضايا «البسيطة»،وبنفس الدرجة من العموم التي توجد في القضايا السابقة، وذلك بأن ندخل في كل واحدة منها عامل النفي. وبما أن هذا الأخير يمكن أن ينصب إما على السور، وإما على المحمول، وإما عليهما معا، فإن عدد العبارات الممكنة يزداد بمثل ذلك.وهكذا وابتداء من القضية الكلية «ں س أ س»، فإننا نحصل على ثلاث قضايا جديدة:«~ں س أ س»، «ں س ~ أ س»، « ~ں س ~ أ س». وكذلك الأمر مع القضية البعضية: «E س أ س»[2]. ومع القضايا العلاقية الثنائية التي لها سوران، فإننا لا نحصل على أقل من ثماني قضايا مختلفة الصور في كل حالة: «ں س ں ص ع س ص»، «~ں س ں ص ع س ص»، «~ں س ~ں ص ع س ص»، «~ں س ~ں ص ~ ع س ص»، وهلم جرا وكذلك الأمر مع «E س E ص ع س ص».

ب) القضايا العامة المركبة.. إن هاتين السلسلتين من القضايا البسيطة ليستا هما الوحيدتين اللتين يمكن التعبير عنهما برمزية منطق الدوال. إذ يمكن بالفعل إنشاء قضايا أكثر تركيبا عندما نطبق على الأولى عوامل منطق القضايا «∧»، « V »، «⊂»... وهذا هو

(1) وتقرأ: « يوجد س واحد بحيث إنه بالنسبة إلى كل هـ فإن س وهـ يصدقان على ع.» و« يوجد هـ واحد بحيث إنه بالنسبة إلى كل س، فإن س وهـ يصدقان على ع».

(2) ونلاحظ على كل حال أن هذه القضايا المتمايزة من «الناحية الصورية»، ليست هي كذلك من «الناحية المادية»، إذ يوجد بينها التكافؤات التالية: ~ں س ~ أ س ≡ E س أ س، ~ E س ~ أ س ≡ ں س أ س، ں س ~ أ س ≡ ~ E س أ س، E س ~ أ س ≡ ~ ں س أ س.

الصعيد الذي سنلاقي فيه القضايا العامة الكلاسيكية إلى جانب أمور أخرى.

وبالفعل فإن القضايا التي على صورة «كل أ هو ب»و«بعض أ هو ب» ليس فيهما درجة العموم التي توجد في القضايا البسيطة المتمثلة في «ںس أ س» و«E س أ س»، لأن الأشياء التي تصدّق المحمول «ب» يجب أن تصدّق أيضا «أ» الذي بهذا يقوم بدور الشرط المقيد. ولهذا يمكن أن نرمز إلى القضية الكلية الموجبة « كل أ هو ب»، بواسطة الاستلزام التالي: «ںس (أ س⊂ب س) » الذي نقرأه: « بالنسبة إلى كل س، إذا كان س ـ أ فهو ب». وفي هذه الصورة نكون أمام قضية «لا وجودية». وفعلا بما أنه ليس من الضروري لصدق الاستلزام أن يكون مقدمه صادقا (راجع جدول الاستلزام. ص 43 من الأصل)، فإن القضية «ںس (أ س⊂ب س)» يمكن أن تصدق حتى لو كان «أ س» كاذبا، أي لو لم يوجد أي شيء يصدق «أ». والكلية السالبة التي تكتب : «ںس (أ س ⊂ ~ ب س)» (بالنسبة إلى كل س، إذا كان س ـ أ، فهو ليس ب) هي الأخرى ينبغي اعتبارها ولنفس السبب قضية لا وجودية.

وفي هذا السياق، فإن الجزئيتين الموجبة والسالبة اللتين من الطبيعي أن نعرفهما بأن كلا منهما على التوالي هي نفي للقضية الكلية المقابلة لها، يجب الرمز إليهما «بعطف مسور»، أي: «Eس(أ س ∧ب س)» بالنسبة إلى الجزئية «الموجبة»، و«E س (أ س ∧~ ب س)» بالنسبة إلى الجزئية « السالبة». وسبب ذلك هو أن نفي الاستلزام لا يعطي استلزاما جديدا، بل يعطي عطفا: «~ (ق⊂ل) ≡ ق∧~ ل)» وبهذا فإن القضية الجزئية لها دلالة «وجودية»، لأن العطف لا يصدق إلا إن صدقت حجتاه، أي إن وجد على الأقل «س» واحد هو في آن واحد «أ» و«ب».

إن إلحاق القضية الكلية الكلاسيكية بالاستلزام، وإلحاق القضية الجزئية بالعطف، يؤدي إلى فساد بعض قواعد المنطق التقليدي، أعني قواعد التداخل والعكس الناقص والأقيسة التي توجد بها الحرف P [الذي يشير إلى عكس الكلية الموجبة عكسا ناقصا في بعض الأقيسة عند ردها إلى القياس الكامل]. وبالفعل فإنه لا يمكن الانتقال من صدق الاستلزام إلى صدق العطف المطابق له، أو في حالتنا، من صدق قضية لا وجودية إلى قضية

وجودية. غير أنه يجب أن نضيف ـ وهذا أمر لا يحصل دائما ـ أن فساد هذه القوانين مرتبط باختبار المنطقيين أن يكتبوا ـ من أجل سهولة الحساب . القضية الكلية في صورة استلزام وقد ترتب على هذا تحويلها إلى قضية لا وجودية. لكننا إذا ما تصورنا القضية الكلية بالمعنى الذي تصوره أرسطو الذي استبعد « الأصناف الخالية » [1] أي افترض دائما أن كل محمول يصدق بالفعل أو بالإمكان على شيء ما، فإن قوانين التدخل والعكس تعود صحيحة وكذلك الأقيسة التي يوجد في صيغها الحرف P.[2]

(1) إن مفهوم « الصنف الفارغ » أي الصنف الذي يمكن تصوره كصنف غير أنه لا يحتوي أي عنصر (مثل الخماسي المتساوي السطوح Pentaèdre) هو مفهوم أجنبي تماما عن أرسطو.

(2) C F. LUKASIEWICZ. Aristotle' s Syllogistic , et notre ouvrage : Logique et Méta-logique , P.36. S V

الباب الرابع

منطق الدوال أو المحمولات

إن تحليلات الباب السابق لم تستهدف إلا شرح معنى بعض المفاهيم التي أصبحت عادية، وإعداد القارئ غير المتعود على معالجة صيغ مجردة، لإعطاء معنى للصيغ التي يستعملها هذا القسم الثاني من المنطق.

ويبقى علينا الآن أن ندرس بمزيد من النسقية، منطق المحمولات، وذلك من أجل تحديد ما هي العبارات الدالية الممكنة التي تطابق قوانين منطقية. ولهذا فستستعمل على التوالي مثلما فعلنا مع حساب القضايا، الطريقة المصادراتية وطريقة الاستنتاج الطبيعي - لأن طريقة الدوال الصدقية لا تناسب بسهولة تقييم القضايا التي وقع تحليلها إلى بعض عناصرها.

وسوف لا يتيسر لنا، في حدود هذا الكتاب، أن نمضي في دراستنا حتى منطق المحمولات العلاقية (أو الدوال المتعددة الحجج). ولهذا ينبغي أن نقتصر على منطق المحمولات المطلقة (أو الدوال ذوات الحجة الواحدة). ومع ذلك سنخصص في نهاية هذا الباب، فقرة لمنطق العلاقات ولما يسمى « المناطق ذوات الرتبة العليا ».

I- منطق المحمولات حسب الطريقة المصادراتية

إن الحساب الجديد يأخذ من حساب القضايا (الباب الثاني) رمزيته وقواعد تركيبه واستنتاجه. غير أنه يتطلب بعض الرموز الإضافية (أو الخاصة)، وبالتالي تكييف قواعد التركيب والاستنتاج مع أنواع الرموز الجديدة.

1- الرموز والعبارات الجيدة التكوين

فيما يتعلق بالرموز الخاصة بحساب الدوال وقواعد استعمالها (= قواعد التركيب) سبق لنا أن شرحنا ذلك طويلا في الباب السابق. ولهذا نكتفي بأن نذكر هنا بأهمها باختصار.

فإلى رموز «متغيرات» منطق القضايا التي هي «ق»، «ل»، «م»، «ن».... يجب أن نضيف الرموز«س»، «ص»، «هـ»، «و» التي هي متغيرات شيئية أو شخصية، والرموز «أ»، «ب»، «ج»، «د»، التي هي متغيرات «محمولية مطلقة أو غير محللة» [1] وتطبيق متغير محمولي على متغير شيئي يعطي عبارة قضوية: ولهذا فإن «أ س»، «ب س»...تماما مثل «ق»، «ل»، «م» تمثلان قضيتين.

وإلى رموز الثوابت، أي إلى عوامل منطق القضايا، يجب أن نضيف عاملين جديدين: هما عاملا «التجريد»و التسوير، وينبغي اعتبارهما عاملين ابتدائيين مثل النفي.

(أ) فعامل « التجريد » (أو المجرِّد) الذي يمكن الرمز إليه بواسطة متغير شخصي فوقه (شدة) «سّ»، «صّ»، «هـّ»... يسمح، ابتداء من قضية من القضايا، أي من قول واقعي، بالتعبير عن خاصية مجردة. فإذا طبقنا عامل التجريد «سّ» على ما تقوله القضية «أ س»، فإن العبارة «سّ أس» لا تعود تمثل قضية، بل حسب تأويلنا المفهومي أو الماصدقي لها، فإنها تمثل كون س متصفة بالصفة أ، أو مجموعة أفراد س الذين يتصفون بالصفة أ. وفي نهاية الأمر فإن العبارة «سّ أس» لا تعني أكثر من ما يعنيه الرمز «أ». ولهذا يمكننا أن نتساءل عن فائدة هذا العامل الجديد الذي ليس له ما يعادله في اللغة العادية. وهو في

---

(1) ونقصد بهذا أن « أ »، « ب »، « ج »يمكن أن تحل محل محمول « علاقي» لكن باعتباره جملة.

الواقع يسمح لنا بأن نمثل المحولات المركبة التي نريد أن نحللها إلى محمولين بسيطين أو عدة محمولات بسيطة.

وبالفعل كيف نعبر في سياق المنطق الذي يهمنا، عن المحمولات التي هي من هذا القبيل: «كون الشيء أ وب في آن واحد»، و«كون الشيء أ أو ب في آن واحد»، و «كون الشيء بحيث إن كان أ كان ب» ؟ وفي مثل هذه الحالة، فإن عوامل العطف والفصل أو الاستلزام لا يمكن استعمالها بشكل مباشر، لأنها بما أنها عوامل قضوية، فإنه لا يمكن تطبيقها على عبارات حملية. لكن «التجريد» بالذات يسمح لنا، ابتداء من عبارة قضوية مثل «أس Λ ب س» بأن نكوّن العبارة الحملية المطابقة لها «سّ (أس Λ ب س) » التي تعني: «كون س متصفة بالصفة أ والصفة ب في آن واحد». إن هذه العبارة الحملية يمكن فيما بعد أن تطبق على متغير شخصي مثل «ص»، لإعطاء عبارة قضوية جديدة، وهي: «(سّ (أس Λ ب س)) ص »، التي تعني أن «ص هو س من حيث إن س هو أ وس هو ب»، وهذه طريقة ملتوية للقول: « ص هو أ، وص هو ب ». ولهذا يمكن أن نضع التكافؤ التالي: « أ ص Λ ب ص ≡ سّ (أ س Λ ب س)) ص، الذي له قيمة قاعدة تركيبية مزدوجة: وهو أن الانتقال من الطرف الأول إلى الطرف الثاني هو قاعدة « التوسع» expansion، وأن الانتقال العكسي هو « قاعدة التقلص» réduction.

(ب) وإلى عامل «التجريد»، ينضاف عاملا «التعميم» اللذان يمثلهما الرمزان «ں» و«E». وعوامل التعميم تكون دائما متبوعة بعامل تجريد يكون معه « سورا» quantificateur: إن ں سّ هو السور الكلي، وE سّ هو السور الجزئي أو الوجودي.[1]

ومجال تأثير السور يمتد عادة إلى العبارة الحملية التي تليه. لكنه إذا نصب على عبارة حملية تحتوي على عامل ثنائي، فإن هذه العبارة يجب وضعها بين قوسين اجتنابا لكل ليس. فنكتب «ںسّ ~ أ س»، « ںسّ ب س Λ E سّ أ س» بدون قوسين، لكننا نكتب « ںسّ (أ س Λ ب س)»، « E سّ (أ س ⊂ ب س) Λ أ ص» مع استعمال القوسين.[2]

---

(1) وعملا بهذا الضبط المتعلق بالرمزية، من الآن فصاعدا سنكتب السورين U سّ وE سّ بوضع «شلة» على المتغير الذي يسميانه وذلك بدلا من U س وE س كما هو في الباب السابق.

(2) ينبغي أن نلاحظ أنه لا ينبغي أن نكتب « U سّ أ س Λ صّ ب ص» مثلا، لأن العبارة «صّ ب ص» نظرا لكونها عبارة حملية مجردة وليست عبارة قضوية، فهي لا تصلح لأن تكون حجة ثانية لعامل العطف الذي هو عامل قضوي.

(ج) إن العبارات الجيدة التكوين في منطق المحولات تضم إذن، علاوة على العبارات الجيدة التكوين في منطق القضايا، العبارات القضوية التي نحصل عليها بتطبيق متغير محمولي على متغير شيئي: «أ س»، «ب س»...، والعبارات التي يمكن إنشاؤها بتطبيق عبارة محمولية مجردة على متغير شيئ: «(سّ أس) ص»، «(صّ (أ ص v ب ص)) س»...، والعبارات التي تتكون من عامل تعميم متبوع بعبارة محمولية مجردة: «ں سّ أ س»، «ں سّ (أ س ⊂ ب س)»...، وأخيرا العبارات القضوية الحاصلة بوضع عامل ثنائي بين عبارتين قضويتين أيا كانتا «أ س Λ E صّ ب ص»، «ں سّ أ س ⊂ E سّ أ س»...

إننا في بنائنا للعبارات الجيدة التكوين نمتنع اتقاء لكل ليس في الترميز، عن بناء عبارة تناقض نفس المتغير في صورته المقيدة وفي صورته الحرة معا (قاعدة منع « الترادف الكاذب»). ولهذا فنحن لا نقبل العبارة «أ س ⊂ E سّ أ س»، لأن المتغير س في الطرف الأول هو متغير «حر»، وفي الثاني هو متغير «مقيد». لكنه يمكن أن نقول نفس الشيء بالطريقة التالية: «أ س ⊂ E صّ أص» بتغيير اسم المتغير المقيد.

ونمتنع كذلك من أن ندخل في عبارة تحتوي على متغير «مقيد» عامل تجريد من نفس الاسم. ولهذا فنحن لا نكتب «ں سّ (سّ أ س) س»، بل «ں سّ (صّ أ ص) س» (قاعدة منع تنافس المتغيرات المقيدة).

2- بديهيات وتعريفات وقواعد الحساب الجديد

(أ) إن بديهيات هذا المنطق الموسع تضم البديهيات الأربع في منطق القضايا وبديهية واحدة إضافية:

البديهية ٧: ⊣ ں سّ أ س ⊂ أ ص.

إن هذه البديهية الجديدة يقتصر أمرها على إظهار معنى السور الكلي، كما حللناه في الباب السابق (II§، ١)

وإلى التعريفات الثلاثة في حساب القضايا يضاف تعريف السور الجزئي:

E سَ أ س = بالتعريف ~ (ںسَ ~ أ س) (التعريف IV)

الذي يسمح لنا بأن لا نبقي إلا على السور الكلي كسور أولي. ونتعرف بسهولة في هذا التعريف على ما يطابق القانون الكلاسيكي المتعلق بالقضايا المتناقضة (جم = نفي كس). ومع ذلك، فإن هذا القانون ينصب هاهنا على قضايا عامة بسيطة، بدلا من أن ينصب على القضايا العامة الكلاسيكية التي هي قضايا مركبة.

(ب) إن القواعد الأساسية للاستنتاج (قواعد الاشتقاق والتعويض) مأخوذة أيضا من منطق القضايا. لكن يجب ضبطها وتنويعها من أجل عمل حساب لمختلف أنواع المتغيرات في الحساب الجديد، وخاصة للتفريق بين المتغيرات « الحرة» والمتغيرات «المقيدة».

إن قاعدة الاشتقاق في منطق القضايا صالحة دون تغيير، ويضاف إليها قاعدة جديدة تسمح بإدراج السور الكلي في عبارة من العبارات، ببعض الشروط. ويمكن التعبير عن هذه القاعدة في صورة الخطاطة التالية:

⊣ ق ⊂ أ ص

قاعدة : (قا$_2$) (1)

⊣ ق ⊂ U سَ أ س

وهي تعني أنه إذا صحت لدينا العبارة «ق ⊂ أ ص»، أمكننا أيضا أن نثبت صحة العبارة «ق ⊂ U سَ أ س» بشرط أن لا يكون المتغير «ص» موجودا كمتغير «حر» في «ق» ولا في «أ»[2]. ويفهم سبب التقييد المفروض على هذه القاعدة، عند ملاحظة أن «ق» أو «أ» إذا كانت تحتوي على ذكر حر للمتغير «ص»، فإن معناها يتوقف على الشيء الذي

(1) ومثلما أننا نستعمل الحرفين المسطرين «ل» و«ل» للإشارة بهما إلى أنهما عبارتان قضويتان، فإننا نستعمل «أ» و«ب» للإشارة بهما إلى أية عبارة حملية.

(2) بما أن قواعد الاستنتاج خاضعة لقواعد التركيب، فإن العبارة « ق ⊂ U سَ أ س » يجب أن لا تخرق قواعد «الترادف الكاذب»، ولا قاعدة التنافس بين المتغيرات المقيدة « وهذه الملاحظة تنطبق من جهة أخرى على كل قواعد الاستنتاج».

يمثله هذا المتغير الذي هو في حد ذاته مقيد بالمتغير «ص» المشار إليه صراحة، لكن هذه الصلة الأخيرة لا تعود موجودة في العبارة « قِو ⊂ لاسّ أ س».

وفيما يتعلق «بقواعد التعويض» التي هي كثيرة التعقيد، فإنه يمكن بصفة عامة أن نميز حالتين:

- إذا كانت المتغيرات الواقع عليها التعويضات، ليست واقعة في نطاق تأثير عامل تجريد فليس عليها قيود غير القيد الذي تفرضه قاعدة «المترادفات الكاذبة». ومع هذا التحفظ، فإنه يمكن في عبارة صحيحة، تعويض كل ذكر لمتغير قضوي، بنفس العبارة القضوية، (قاعدة ت ق)، وكل متغير شيئي، بمتغير شيئي آخر (قاعدة ت س)، وكل متغير محمولي بمتغير محمولي آخر أو بعبارة محمولية (قاعدة ت أ).

- لكن إذا كانت المتغيرات موجودة في نطاق تأثير سور من الأسوار أو عامل تجريد، فإن قواعد التعويض لا تنطبق إلا مع التقييد التالي: إن المتغير القضوي، والمتغير الشيئي والمتغير المحمولي لا يمكن أن يعوض إلا بعبارة لا تحتوي على المتغير الذي يسميه عامل التجريد، وعلاوة على ذلك إذا وجب إجراء التعويض على متغير «مقيد»، فإنه يجب أيضا إجراؤه على عامل التجريد المطابق له. وحسب هذه القاعدة، فإن العبارة «لا سّ (أ س Λ ب ص)» تصبح بتعويض «س» بـ «هـ»: «لاهـّ أ هـ Λ ب ص)».

3- برهنة قوانين الحساب

إن مبدأ البرهنات هو بالضبط نفس المبدأ المعمول به في منطق القضايا. فنحن ننطلق من بديهية أو من مبرهنة سبق إثباتها [1]، وبسلسلة من الاشتقاقات المعمولة وفقا لقواعد الحساب، نعمل على الحصول على العبارة المراد برهنتها. ومن أجل الاختصار، فإننا ندرج أيضا عددا من «القواعد المشتقة». وهاهي ذي قاعدة نحتاج إليها للبرهنات التي نقترحها:

إذا صح لدينا: ⊢ أ ص ⊂ يـ ص   (قا 3)

(1) إن جميع قوانين منطق القضايا يمكن اتخاذها منطلقا للبرهنة في منطق المحمولات.

صح لدينا أيضا: ⊣ U سَ أ س U ⊂ سَ ب س

(إن العبارتين المحموليتين «أ» و«ب» يجب أن تكونا مستقلتين عن س وص).

(أ) إن أسهل البرهنات وأسرعها هي التي تقع على «نفي» القضيتين العامتين البسيطتين. «U سَ أ س» و« E سَ أ س ». وهما تسمحان لنا بوضع القوانين التالية:

⊣ ~ (U سَ أ س) ≡ E سَ ~ أ س　　　قواعد المتناقضين بالنسبة إلى القضايا

⊣ ~ (E سَ أ س) ≡ U سَ ~ أ س　　　المسورة البسيطة

⊣ ~ (U س ~ أ س) ≡ E س أ س

⊣ ~ (E سَ ~ أ س) ≡ U سَ أ س

ـ برهنة القانون : ⊣ ~ (E سَ أ س) ≡ سَ ~ أ س.

في كل مرحلة من مراحل الاشتقاق، نشير على يسار السطر المقابل، إلى قاعدة التركيب أو الاستنتاج التي تبرره. وبقليل من التعود نضمر بسهولة قواعد التوسيع والتقليص (التي هي قواعد تركيب) وكذلك قاعدة التعويض.

[1] ⊣ (ق ≡ ل) ⊂ (~ ل ≡ ~ ق)　　قانون منطق القضايا

[2] ⊣ (~ U سَ ~ أ س) ≡ (E سَ أ س). ⊂ .(~ E سَ أ س) ≡ ~(~ U سَ أ س)

بواسطة (ت ق): ق / ~ U سَ، ل / E سَ أ س.

[3] ⊣ ~ U سَ ~ أ س ≡ E سَ أ س، بالتعريف (IV)

[4] ⊣ ~ E سَ أ س ≡ ~ (~ U سَ ~ أ س) بواسطة (قا ∧) مع [2] و[3]

[5] ⊣ ~ E سَ أ س ≡ U سَ ~ أ س بواسطة قانون القضايا «ق ≡ ~ ~ ق».

إن منطلق هذه البرهنة قانون من قوانين منطق القضايا (السطر 1). وبتطبيق قاعدة التعويض نحصل على السطر [2]. وليس السطر [3] سوى التعريف (IV) باعتباره تكافؤا. والسطر [4] ينجم من السطرين [2] و[3] بتطبيق قاعدة الاشتقاق (قا ٨). وفي الأخير وللانتقال من السطر [4] إلى السطر [5] نستعمل قانون النفي المزدوج «ق≡~ ~ ق» الذي يسمح بتعويض «~ (~ U سَ ~ أ س)» بـ « U سَ ~ أ س».

(ب) وهناك سلسلة ثانية من القوانين المهمة تتعلق «بتوزيع» السورين U سَ و E سَ بالنسبة إلى مختلف العوامل. وهاهو ذا بعض منها:

⊣ U سَ (أ س Λ ب س) ≡ U سَ أ س Λ U سَ ب س

⊣ E سَ (أ س V ب س) ≡ E سَ أ س V E سَ ب س

⊣ U سَ (أ س ⊂ ب س) ⊂ U سَ أ س ⊂ U سَ ب س

⊣ E سَ (أ س Λ ب س) ⊂ E سَ أ س Λ E سَ ب س

⊣ U سَ (أ س ⊂ ب س) ⊂ E سَ أ س ⊂ E سَ ب س

برهنة القانون: ⊣ U سَ (أ س Λ ب س ≡ (U سَ أ س Λ U سَ ب س):

[1] ⊣ (ق Λ ل) ⊂ ق قانون منطق القضايا

[2] ⊣ (أ ص Λ ب ص) ⊂ أ ص بواسطة (ت ق)، ق/ أ ص، ل/ ب ص.

[3] ⊣ هـَ (أ هـ Λ ب هـ) ص ⊂ أ ص بواسطة قاعدة التوسيع

[4] ⊣ U سَ (هـَ (أ هـ Λ ب هـ)) س ⊂ U سَ أ س بواسطة (قا 3).

[5] ⊣ U سَ (أ س Λ ب س) ⊂ U سَ أ س بواسطة قاعدة التقليص.

[6] ⊣ (ق Λ ل) ⊂ ل قانون منطق القضايا

[7] ⊣ (أ ص Λ ب ص) ⊂ ب ص بواسطة (ت ق) ق/ أ ص، ل/ ب ص

[8] ⊣ هـ (أ هـ ∧ ب هـ) ص ⊂ ب ص بواسطة قاعدة التوسع.

[9] ⊣ U سّ (هـ (أ هـ ∧ ب هـ)) س ⊂ U سّ ب س بواسطة (قا 3).

[10] ⊣ U سّ (أ س ∧ ب س) ⊂ U سّ ب س بواسطة قاعدة التقليص.

[11] ⊣ U سّ (أ س ∧ ب س) ⊂ Uسّ أ س. ∧. Uسّ (أ س ∧ ب س) ⊂ U س ب س.

بواسطة (قا∧) مع [5] و[10]

[12] ⊣ Uسّ (أ س ∧ ب س) ⊂ Uس أ س ∧ U س ب س بواسطة (قا∧) مع الاعتماد على القانون «(ق ⊂ ل). ∧. (ق ⊂ م). ⊂. ق ⊂ (ل ∧ م)». [1]

وللوصول إلى المبرهنة théorème المراد إثباتها، بقي القيام ببيان الاستلزام العكسي: (Uسّ أ س ∧ ب س) ⊂ Uس (أ س ∧ ب س). وبالفعل فإن كل مبرهنة في صورة تكافؤ تؤول حسب تعريف هذا الأخير (التعريف III) إلى الاستلزام مزدوج من «ق» إلى «ل»، ومن «ل» إلى «ق».

4- نطق المحمولات ونظرية القياس الكلاسيكية

وفي إطار منطق المحمولات تندرج قوانين نظرية القياس التقليدية، ولاسيما التي تتعلق بنفي القضايا العامة الكلية منها والجزئية التي يقع التعبير عنها بالصيغ التالية:

⊣ ~ (U سّ. أ س ⊂ ب س) ≡ E سّ (أ س ∧ ~ ب س)

⊣ ~ (E سّ. أ س ∧ ب س) ≡U سّ (أ س ⊂ ~ ب س)

⊣ ~ (U سّ. أ س ⊂ ~ ب س) ≡ E سّ (أ س ∧ ب س)

⊣ ~ (E سّ. أ س ∧ ~ ب س) ≡ U سّ (أ س ⊂ ب س)

---

(1) والتعويضات التي يتعين القيام بها في هذا القانون هي التالية: ق / U سّ (أ س ∧ ب س)، ل/ U سّ أ س، م/ U سّ ب س.

إن هذه الصيغ الأربع ليست سوى تعبير عن القوانين التي تحكم القضايا المتناقضة الكلاسيكية والتي بمقتضاها ننتقل من نفي (كم) و(جم) إلى إثبات (جس) و(كس) والعكس بالعكس[1] ومع ذلك هناك استنباطان كلاسيكيان لا تمكن برهنتهما في نسق منطق المحمولات إن نحن اعتبرنا القضايا الكلية استلزامات، والقضايا الجزئية قضايا عطفية: وهما قانونا «التداخل» و العكس «الناقص» (الباب III § 3 ب) لكن الانتقال من القضية الكلية إلى القضية الجزئية في «التداخل» وفي «العكس الناقص» يعود صحيحا إن نحن أضفنا إلى عبارة القضية الكلية ما يثبت الوجود، وذلك بكتابتها هكذا : « (U سَ. أ س ⊂ ب س) ∧ E سَ أ س» ومداخلة القضية الكلية الوجودية تعبر عنها إذن الصيغة التالية:« (U سَ. أ س ⊂ ب س. ∧. E سَ أ س) ⊂ E سَ (أ س ∧ ب س)».

وفي إطار الطريقة المصادراتية، يمكننا أن نبرهن صحة الأقيسة الكلاسيكية باستثناء الضروب الأربعة التي يوجد في [عبارتها اللاتينية] الحرف Bramantip P) Fesapo,Felapton ,Darapti) والتي ليس لمقدمتيها الكليتين دلالة وجودية. في حين أن نتيجتها قضيته جزئية ذات دلالة وجودية،لكن هاهنا مرة أخرى يكفي لبرهنة الأقيسة المعيبة أن نعطي صغراها دلالة وجودية،وذلك بإضافة دلالة وجودية إلى الاستلزام المطابق لها.

ونقترح فيما يلي برهنة الصيغة المطابقة لضرب Barbara [كم. كم. كم.]

لنفرض أننا نريد أن نبرهن: ((U سَ. أ س ⊂ ب س) ∧ (U سَ. ج س ⊂ أ س)) ⊂ (U سَ. ج س ⊂ ب س):

[1] ⊣ (ق ⊂ ل. ∧ م ⊂ ق) ⊂ (م ⊂ ل) صيغة «مشاركة» يمكن برهنتها.

[2] ⊣ (أ ص ⊂ ب ص. ∧ ج ص) ⊂ (ج ص ⊂ ب ص)

بطريقة (ت ق)، ق / أ ص، ل / ب ص، م / ح ص.

[3] ⊣ (هـَ. أ هـ ⊂ ب هـ. ∧ ج هـ ⊂ أ هـ) ص ⊂ (هـَ. ج هـ ⊂ ب هـ) ص

(1) بالنسبة إلى هذا القانون راجع ص 72.

بطريقة التوسيع.

[4] ⊣ Uسَ (أ س ⊂ ب س. ∧ ج س ⊂ أ س) ⊂ U سَ (ج س ⊂ ب س)

بطريقة (قا3) وقاعدة التقليص.

[5] ⊣ Uسَ (أ س ∧ ب س) ≡ U س أ س. ∧. U سَ ب س

قانون التوزيع (1)

[6] ⊣ Uسَ (أ س ⊂ ب س. ∧ ج س ⊂ أ س) ≡ Uسَ (أ س ⊂ ب س). ∧. Uسَ (ج س ⊂ أ س)

بطريقة (ت ق) مع أ س/ (أ س ⊂ ب س) وب س/ (ج س ⊂ أ س)

[7] ⊣ Uسَ ((أ س ⊂ ب س). ∧. Uسَ (ح س ⊂ أ س)) ⊂ U سَ (ح س ⊂ ب س)

عندما عوضنا في [4] الطرف الأول من الاستلزام بمقابله حسب [6].

ولإجراء هذه البرهنة انطلقنا من أحد القوانين منطق القضايا سميناه صيغة «مشاركة» ونحصل على الصيغة «المشاركة» بإهمال كل أسوار الصيغة المراد برهنتها وبتعويض القضايا الشخصية «أس»، «ب س»... بمتغير قضوي مطابق. وعندما تكون هذه الصيغة «المشاركة» ممكنة البرهنة، وهو ما يمكن إثباته بإحدى الطرق المشار إليها في الباب الثاني، فإنه يمكن الانطلاق منها لبرهنة الصيغة المطابقة في منطق المحمولات. وهذه الطريقة ليست صالحة لبرهنة الأقيسة فقط بل لأمور أخرى أيضا.

إن منطق المحمولات يسمح ببرهنة عدد كبير من الصيغ التي ليس لها ما يطابقها في المنطق الكلاسيكي. ولهذا فهو يقدم عددا من أنواع من خطاطات الاستدلالات أكبر مما تقدمه نظرية القياس التقليدية.

III- منطق المحمولات بطريقة الاستنتاج الطبيعي

إن طريقة «الاستنتاج الطبيعي» تتكيف جيدا بوجه خاص وبشكل بسيط جدا مع منطق المحمولات. فيكفي بالفعل، بعد إدخال الرموز اللازمة للتعبير عن القضايا المحللة، وبعد تغيير قواعد التركيب تبعا لأنواع الرموز الجديدة، أن نتبنى خطاطة من «البديهيات» والقواعد التي تأخذ بعين الاعتبار عبارات النسق الجديدة.

وفيما يتعلق بإثراء الرمزية فليس لدينا ما نضيفه إلى ما قلناه في مستهل هذا الباب. فكل قواعد التركيب الخاصة بالطريقة المصادارتية يمكن نقلها إلى طريقة الاستنتاج الطبيعي. والطريقتان إنما تختلفان على صعيد البديهيات وقواعد الاشتقاق.و طريقة الاستنتاج الطبيعي إنما تظهر أناقتها وبساطتها في منطق المحمولات وكذلك في منطق القضايا.

1. البديهيات والقواعد

إننا نتذكر أن هذه الطريقة في منطق القضايا لا تحتوي إلا على خطاطة واحدة من البديهيات قد ⊢ قد هي، وأن «قد» تشير إلى أية عبارة قضوية. إن هذه الخطاطة نفسها تكفينا لبناء منطق المحمولات، باستثناء أن «قد» يمكن أن تشير أيضا إلى عبارة قضوية في الحساب الجديد.

وأما بالنسبة إلى القواعد «البنيوية» فهي تنطبق أيضا بدون تغيير على العبارات الخاصة بمنطق المحمولات. غير أنه ينبغي أن نضيف إلى القواعد «الإجرائية» في منطق القضايا أربعا جديدة من أجل إدراج الأسوار: اثنتين للسور الكلي واثنتين للسور الجزئي.

قاعدة إدراج السور U سَ:

في المقدم	في التالي
$(U_م)$ أ$_{ص}$ ⊢ قد U$_{سَ}$ أ$_{س}$ ⊢ قد	$(U_ت)$ ⊢ أ$_{ص}$ ⊢ U$_{سَ}$ أ$_{س}$

إن القاعدة (U م) لا تخضع لأي قيد خاص ماعدا الذي تفرضه قواعد التركيب.
لكن القاعدة (U ت) لا تصح إلا بشرط ألاّ يذكر المتغير «ص» كمتغير «ص» حر لا في «أ»، ولا في أي مقدم محتمل لـ «أ ص».

وسنجد مرة أخرى، بالنسبة إلى القاعدة (U ت) القيود التي قيدنا بها القاعدة (قا 2) في الطريقة المصادراتية، ويجري تفسيرها بطريقة مماثلة. ولإمكان الانتقال من «أ ص» إلى «U سّ أ س» يجب أن تصدق «أ» على أي شيء. لكن الشيء الذي تمثله «ص» لا يمكن أن يكون أي شيء، لو ذكر في مقدم تاليه هو «أ ص»، أو كذلك في العبارة الحملية «أ».

قاعدة إدراج السور E سّ :

في التالي		في المقدم	
⊢ أ ص ⊢ E سّ أ س	(E ت)	أ ص ⊢ ق E سّ أ س ⊢ ق	(E م)

فيما يتعلق بالسور E سّ، فإن القاعدة (E ت) المناظرة للقاعدة (U ت) هي الصالحة، وبدون قيود خاصة، بينما القاعدة (E م) تخضع لنفس القيود التي تخضع لها القاعدة (U ت) ولنفس الأسباب : فالمتغير «ص» لا يمكن أن يرد كمتغير «حر» في «ق» ولا في «أ» ولا في مقدم محتمل للعبارة «ق».

وبالخطاطات المتعلقة بالسورين يتوفر لطريقة الاستنتاج الطبيعي « العتاد » اللازم لبناء منطق للمحمولات، ولبرهنة كل المبرهنات القائمة على القضايا العامة في إطار منطق ثنائي القيمة.

2- برهنة بعض المبرهنات

نفرض أننا نريد أن نبرهن: ~ E سّ أ س ≡ U سّ ~ أ س. وبما أننا لم تبن قاعدة خاصة لإدراج التكافؤ « ≡ »، فإنه يجب علينا أن نبرهن الاستلزامين العكسيين اللذين يرتد إليهما كل تكافؤ.

- الاستلزام الأول الذي يجب برهنته: ~ E سّ أس ⊂ U سّ ~ أس[1]:

[1] أص ⊣ أص	بديهية.
[2] أص ⊣ E سّ أس	بطريق (E ت) بدون قيود.
[3] أص، ~ E سّ أس ⊣ ك	بطريقة (~ أ).
[4] ~ E سّ أس ⊣ أص	بطريقة (~ ت).
[5] ~ E سّ أس ⊣ U سّ ~ أس	بطريقة (U ت) قيود متوفرة.
[6] ⊣ ~ E سّ أس ⊂ U سّ ~ أس	بطريقة (⊂ ت).

الاستلزام الثاني الذي يجب برهنته: U سّ ~ أس ⊣ ~ E سّ أس :

[1] أص ⊣ أص	بديهية.
[2] أص، ~ أص ⊣ ك	بطريقة (~ أ).
[3] أص، U سّ ~ أس ⊣ ك	بطريقة (U أ) دون قيود خاصة .
[4] E سّ أس، U سّ ~ أس ⊣ ك	بطريقة (E أ) قيود متوفرة.
[5] U سّ ~ أس ⊣ ~ E س أس	بطريقة (~ ت) .
[6] ⊣ U سّ ~ أس ⊂ ~ E سّ أس	بطريقة (⊂ ت).

و لأول وهلة، فإن هذه البرهنة لقانون النقيضين بطريقة الاستنتاج الطبيعي، تبدو أطول وأكثر تركيبا، من البرهنة المقدمة في إطار الطريقة المصادراتية (§ I، 3). لكن هذا في الظاهر فقط. وبالفعل فإنه في الطريقة المصادراتية يجب في الغالب الاستناد إلى هذه المبرهنة أو تلك التي سبق تقريرها (وإلا لم يكن للبرهنات نهاية)، وعندما يتعلق الأمر بمنطق

(1) في المبرهنات التالية سوف نتبع نفس الأسلوب الذي اتبعناه في منطق القضايا (راجع الباب الثاني § III، 3)

المحمولات، يجب اللجوء إلى مبرهنات منطق القضايا، لكن ليس هناك قاعدة توجه إلى اختيار مبرهنة معينة صالحة لتقدم البرهنة : بل الأمر يعود إلى الحدس وإلى تمرينات شاقة وطويلة. أما مع طريقة الاستنتاج الطبيعي فإننا لا نكون ملزمين أبدا بالاستناد إلى مبرهنة سبقت برهنتها لأن منطق الاشتقاق هو دائما بديهية من البديهيات. وليس هناك في نهاية الأمر إلا خطاطة واحدة من البديهيات ق ⊣ ق.

تتخذ في لغة القضايا المحللة صورة «أ س ⊣ أ س» أو «ب ص ⊣ ب ص».... وبما أنه من جهة أخرى لا توجد إلا قاعدتان لإدراج كل واحد من العوامل (باستثناء النفي) فإن المسيرة اللازمة أضمن وأسهل للعثور عليها.

ولإقناع القارئ بذلك نقدم فيما يلي برهنة قانون توزيع السور ∪سّ بالنسبة إلى العطف، وقانون القياس على صورة Barbara [كم ـ كم ـ كم]. فيمكنه أن يقارنهما بالبرهنتين المطابقتين لهما في الطريقة المصادرتية. (§ II، 3 و4).

نفرض أننا نريد أن نبرهن قانون التوزيع: ∪سّ (أ س ∧ ب س) ≡ (∪سّ أ س ∧ ∪سّ ب س):

[1] أ ص ⊣ أ ص [1*] ب ص ⊣ ب ص بديهيتان.

---

[2] أ ص، ب ص ⊣ أ ص [2*] أ ص ∧ ب ص ⊣ ب ص بطريق (∧ م).

---

[3] ∪ سّ (أ سّ ∧ ب سّ) ⊣ أ ص [3*] ∪ سّ (أ س ∧ ب س) ⊣ ب ص
بطريق (∪ م)(1)

---

[4] ∪سّ (أ س ∧ ب س) ⊣ ∪سّ أ س [4*] ∪سّ (أ س ∧ ب س) ⊣ ∪ سّ ب س
بطريق (∪ ت)

---

[5] ∪سّ (أ س ∧ ب س)، ∪سّ (أ س ∧ ب س) ⊣ ∪سّ أ س ∧ ∪سّ ب س
بطريق (∧ ت)

---

[6] ∪سّ (أ س ∧ ب س) ⊣ ∪سّ ∧ ب س بطريق (توزيع 3).

---

(1) لتطبيق القاعدة (∪م) الخاصة بإدراج السور ∪س لقد أضمرنا قاعدة «الانتشار» ثم قاعدة الاختزال.

[7] ⊣ ∪سَ (أ س ∧ ب س) ⊂ ∪سَ أ س ∧ ∪ س ب س بطريق (⊂ ت).

و بما أن القانون يكتسي صورة التكافؤ، بقي أن نبرهن الاستلزام العكسي: ∪سَ أ س ∧ ∪سَ ب س ⊂ ∪سَ (أ س ∧ ب س).

[1] أ ص ⊣ أ ص [1 *] ب ص ⊣ ب ص بديهيتان

[2] أ ص، ب ص ⊣ أ ص ∧ ب ص بطريقة (∧ ت)

[3] ∪ سَ أ س، ص ⊣ أ ص ∧ ب ص بطريق (∪ م)

[4] ∪سَ أ س ∧ ∪سَ ب س، ب ص ⊣ أ ص ∧ ب ص بطريق (∧ م) مع م = ∪سَ ب س.

[5] ∪ سَ أ س ∧ ∪ سَ، سَ ب ⊣ أ ص ∧ ب ص بطريق (∪ م)

[6] ∪سَ أ س ∧ ب سَ، ∪سَ أ س ∧ ∪سَ ب س ⊣ أ ص ∧ ب ص

بطريق (∧ م) مع م = ∪سَ أ س.

[7] ∪سَ أ س ∧ ∪سَ ب س ⊣ أ ص ∧ ب ص بطريق (توزيع 3)

[8] ∪سَ ∧ ∪سَ ب س ⊣ ∪سَ (أ س ∧ ب س) بطريق (∪ ت)(1)

[9] ⊣ ∪سَ أ س ∪سَ ب س ⊂ ∪سَ (أ س ∧ ب سَ) بطريق (⊂ ت)

- لنفرض أننا نريد أن نبرهن « القياس» على صورة Barbara [كم. كم. كم]

(∪سَ (أ س ⊂ ب س). ∧.∪ سَ (ج س ⊂ أ س)) ⊂ ∪سَ (ج س ⊂ ب س):

[1] أ ص ⊣ أ ص [1 *] ب ص ⊣ ب ص بديهيتان.

(1) لقد أضمرنا قاعدتي « الانتشار » و« الاختزال » كما في المثال السابق.

[2] أص، أص ⊂ ب ص ⊣ ب ص   بطريق (⊂ م).

---

[3] أص، ∪سَ (أس ⊂ ب س) ⊣ ب ص   بطريق (∪ م)(1)

---

[4] أص. ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس) ⊣ ب ص بطريق (∧ م)
[4*] ج ص ⊣ ج ص   بديهية

---

[5] ج ص، ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس)، ج صَ ⊂ أص ⊣ ب ص
بطريق (⊂ م)(2)

---

[6] ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس)، ج صَ ⊂ أص ⊣ ج ص ⊂ ب ص
بطريق (⊂ ت)

---

[7] ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس)، ∪سَ (ج س ⊂ أس) ⊣ ج ص ⊂ ب ص
بطريق (∪ م)

---

[8] ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس)، ∪سَ (ج س ⊂ أس) ∧ ∪سَ (أس ⊂ ب س) ⊣ ج س ⊂ ب ص   /   بطريق (∧ م)

---

[9] ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس) ⊣ ج ص ⊂ ب ص
بطريق (توزيع 3) و(توزيع 2)

---

[10] ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس) ⊣ ∪سَ (ج س ⊂ ب س)
بطريق (∪ ت)

---

[11] ⊣ ∪سَ (أس ⊂ ب س) ∧ ∪سَ (ج س ⊂ أس) ⊂ ∪س (ج س ⊂ ب س)
بطريق (⊂ ت).

4- منطق العلاقات

إن منطق المحمولات المطلقة كما عرضناه منذ حين، يترك جانبا جميع صور الاستدلال التي تدخل فيها القضايا العلاقية بصفتها قضايا علاقية، ورمزيته بالفعل لا تسمح بتمثيل

(1) لقد أضمرنا هنا أيضًا قاعدتي «الانتشار» و«الاختزال».

(2) مع قَ = ج ص، أص و م = ب ص. والمقدمان الإضافيان في [4] و[4*] أخذناهما من جديد في [5] حسب القاعدة (توزيع 4).

ذكر الأشياء التي يمكن إلحاقها بالمحمول، كما يحدث ذلك مثلا في القضية «س أكبر من ص». فهو يعاني في هذا الأمر من نفس الضيق الذي يعاني منه المنطق التقليدي، فهو مثله، لا يقدر على توضيح أغلب الاستدلالات العلمية. ولكن خلافا للمنطق التقليدي الذي كان منغلقا في الإطار الصلب الذي كانت تمثله الخطاطة الحملية «كذا... هو كذا..» فإن منطق المحمولات المطلقة يمتد بطبيعته إلى أن يكون منطقا للمحمولات العلاقية.[1]

وللانتقال من المنطق الأول إلى المنطق الثاني، ليس هناك حاجة إلى إدخال بديهيات جديدة ولا قواعد استنتاج جديدة: بل يكفي أن نثري الرمزية بنوع جديد من المتغيرات، لكي نتمكن من أن نمثل المحمولات العلاقية بنوعيتها، وأن نكيف قواعد التركيب مع هذه الرمزية المزيدة.

وللإشارة إلى العلاقات الثنائية (أو التي تذكر شيئين)، نستعمل المتغيرات «ع»، «ف»، «ط»...التي إذا طبقت على متغيرات شيئية، أعطت عبارات قضوية بسيطة: «ع س ص»، «ع س س»،... من نوع «س في العلاقة ع مع ص»، أو «س في العلاقة ع مع س نفسها».

واستعمال عاملي التجريد والتسوير، من السهل نقله من حساب المحمولات المطلقة إلى حساب المحمولات العلاقية، وهو يسمح لنا بأن نبني من جهة، عبارات حملية جديدة مطلقة وثنائية، ومن جهة أخرى، عبارات قضوية جديدة، ومن بينها قضايا علاقية مسورة.[2]

والانتقال من منطق العلاقات الثنائية إلى منطق العلاقات «غير الثنائية» (أي ذوات ثلاثة.. «ن» من مرات ذكر الأشياء) ليس فيه صعوبات معينة : بل يجب في كل مرة أن ندخل نوعا جديدا من المتغيرات العلاقية، مثل: «$ع_{ن}$»، «$ف_{ن}$»، «$ط_{ن}$»،...حيث الرقم الاستدلالي ($_{ن}$) يشير إلى نوع العلاقة المستعملة. وهذه المتغيرات العلاقية يجب أن تكون متبوعة بعدد

---

(1) لهذا السبب يعرض أغلب المؤلفين منطق المحمولات المطلقة ومنطق المحمولات العلاقية في نفس الباب.

(2) لقد قدمنا عنها بعض الأمثلة في الباب 3 (§ 3، II).

من المتغيرات الشيئية مماثل للعدد الذي يشير إليه العدد (ن).

إن منطق «المحمولات» التي يذكر فيها شيئان أو عدة أشياء، بفضل التسوير الذي يمكن أن يتناول مختلف الأشياء، تتوفر له رمزية جد غنية تسمح له ببناء عبارات ذوات بنية جد متنوعة يستحيل من الناحية العملية التعبير عنها بشيء من الدقة بواسطة موارد اللغة العادية وحدها. وهكذا وابتداء من متغير محمولي فيه ذكر لثلاثة أشياء، فإننا نبني على الأقل 48 عبارة مسورة مختلفة[1] وهي تؤول حقا إلى 26 عبارة باستعمال التكافؤ بين بعض التركيبات للأسوار.

إن لرمزية منطق القضايا مزية أخرى لها قيمتها هي إمكان التعبير بلغة مصورنة، عن مفاهيم مختلفة مهمة جدا، لا سيما مفهوم «العلاقة التناظرية» (U سَ U صَ ع س ص ⊂ ع ص س) « واللاتناظرية»(U سَ U صَ ع س ص ⊂ ~ ع ص س)، ومفهوم «العلاقة المتعدية» (U سَ U صَ E هـ (ع س هـ ∧ ع هـ ص) ⊂ ع س ص) و« اللامتعدية»، ومفهوم «العلاقة الانعكاسية» (U س ع س س) و« اللاإنعكاسية»، إلخ، وبهذه الصورنة فإن هذه المفاهيم يمكنها بدورها، كما سنرى في الفقرة التالية، أن تتخذ كموضوعات لأقوال جديدة وأن تصبح موضوع دراسة للمنطقي.

ولنضف أن أهمية منطق المحمولات ذوات الحجة الواحدة أو الحجج المتعددة ليست راجعة فقط إلى كونه يمثل عرضا مصورنا لنظرية القياس التقليدية، ولمنطق العلاقات، بل كذلك إلى كونه يسمح بأن نصورن علم الحساب العادي وحتى بعض الصور من نظرية المجموعات، إذا ما أضفنا إليه فقط عددا من الثوابت والبديهيات الرياضية بنوع خاص.[2]

5- مناطق ذوات مرتبة عليا

إن المنطق لا ينتهي مع حساب المحمولات أو الدوال ذوات الحجة الواحدة أو

---

(1) هاهي ذي بعض العبارات: « U سَ U صَ U هـَ ع 3 س ص هـ »، « E سَ U صَ U هـَ ع3 س ص هـ »، « U صَ U سَ U هـَ ع3 س ص هـ »، « E صَ U سَ U هـ ع3 س ص هـ ».

(2) Cf. DUBARLE. Initiation à la Logique. Paris- Louvain.1957,P.47 SV

الحجتين أو الثلاث.... (ن) من الحجج، الذي يمثل فقط ما يسمى «منطق المرتبة الأولى». وفي إطار هذا المنطق، ينصب التسوير على المتغيرات الشيئية فقط وليس على المتغيرات المحمولية أو العلاقية المطبقة على هذه المتغيرات الشيئية. وبما أن قواعد التعويض من جهة أخرى لا تعمل إلا بين متغيرات من نفس النوع فإنه يترتب على ذلك أن المتغير المحمولي لا يمكنه أن يقوم بدور الحجة بالنسبة إلى متغير محمولي آخر. فلا يمكن أن نعبر في سياق المنطق من «المرتبة الأولى» عن أقوال من هذا النوع: «الأحمر لون»، « علاقة الهوية انعكاسية »، إلخ. فمفهوم المطابقة Identité ذاته لا يمكن تعريفه برمزية منطق «المرتبة الأولى»، لأنه يتطلب أن نسلط السور على المتغير المحمولي. ولهذا ظهرت الحاجة إلى توسيع «منطق المرتبة الأولى» وإلى وضع مناطق من «المرتبة الثانية» ومن «المرتبة الثالثة».... ومن المرتبة (ن).

ومنطق « المرتبة الثانية» يسمح بتطبيق التسوير على المتغيرات المحمولية، فهو يقبل أقوالا من هذا القبيل: « أيا كانت الصفة أو إذا كان س يتصف بهذه الصفة، فإن ص تتصف بها أيضا، أي (U أ (أ س ⊂ أ ص)، وهو قول يمكن اعتباره تعريفا للمطابقة.

ومن منطق المرتبة الثانية ننتقل إلى «منطق المرتبة الثالثة»، وذلك بإدراج متغيرات محمولية من المرتبة 2، تطابق محمولات حججها متغيرات شيئية أو متغيرات محمولية من المرتبة 1.

ولبناء السلسلة اللامتناهية نظريا من هذه المناطق المختلفة المراتب، يجب القيام ببعض الاحتياطات، لكي نبقي مختلف أنواع المتغيرات في مجالاتها الخاصة بها، ولكي نتجنب بذلك بناء بعض الأقوال «الانعكاسية» التي من شأنها أن تؤدي إلى متقضات antinomies.[1] إن «نظرية الأنماط» قد تصورها صاحبها (راسل) Russell لتوقي هذه الصعوبات. ومبدؤها هو التالي: إن مختلف المحمولات مرتبة في سلسلة غير محدودة من

---

(1) لو لم نحافظ على التمييز اللازم بين مختلف أنواع المتغيرات لا نجررنا إلى بناء أقوال من النمط التالي: «مجموعة كل المجموعات التي لا تحوي نفسها كعناصر منها ». لكن مثل هذا القول «الانعكاسي» réflexif لا يمكننا أن نقول عنه « إن كان يحتوي نفسه » أو « لا يحتوي نفسه »، لأنه أيا كان وجه تناولنا له، فإنه يؤدي بنا إلى التناقض.

الأنواع أو « الأنماط» types: هي المحمولات من النمط 1، 2، 3... ن.وتعتبر الأشياء أو الأشخاص من النمط 0. إن نظرية الأنماط تتطلب أن تصاغ قواعد مختلف الأنساق، بحيث لا يمكن أن ينطبق محمول من النمط ن إلا على محمولات أو أشياء من نمط أدنى من ن. ومن أجل العمل بهذه القاعدة فإن قواعد التركيب في منطق المحمولات من المرتبة الأولى تنص على أن المتغير المحمولي لا يمكنه أن ينطبق إلا على متغير شيئي.

إن المناطق ذوات المرتبة العليا تفضل منطق المرتبة الأولى بكونها تؤلف نسقا قويا جدا بحيث يمكّننا من أن نمثل بمجموع الرياضيات الحالية [1] دون أن نحتاج إلى إدراج ثوابت رياضية خالصة ودون أن نخرج من الإطار الصارم الذي تفرضه الصورنة المنطقية.

(1) ومع ذلك فإنه يجب أن نلاحظ أن النسق يتضمن بديهيتين لا تبدوان ذواتي طبيعة منطقية خالصة: «بديهية الاختيار» و« بديهية اللانهاية».

Cf. E. w. Beth : Les fondements logiques des mathématiques, 1955, P.143 et 187.

الباب الخامس

بعض المشاكل النظرية الشارحة

إن الأبحاث المنطقية لا تتم ببناء «الأنساق المصورنة» مهما كانت متنوعة ومتعددة: بل هي تصب في طبيعة الحال في أبحاث ذات طبيعة «نظرية شارحة» - أو «منطقية شارحة» فالصورانية بعد بنائها كنسق تصبح بالفعل إما في ذاتها وإما بالنسبة إلى مجالات الأشياء التي تحتمل أن يمثلها موضوعا دراسيا جديدا بالنسبة إلى المنطقي.

ففي المنطق التقليدي مثلا، فإن نظرية القياس والقوانين المنطقية تستمد يقينها من البداهات المقبولة منذ البداية : بداهة المبادئ الأولى قبل كل شيء وبداهة قواعد الاستنتاج العامة، ثم («من الصدق يلزم الصدق ex vero sequitur verum»)، («من الكذب يلزم كل شيء ex falso sequitur quodlibet»)و أخيرا بداهة بعض القواعد الخاصة («مقالة كل ولا واحد dictum de omni et nullo») ومن جهة أخرى فإن البنيات المنطقية التي يهتم بها المنطق التقليدي نظرا لكونها هي ذاتها مستخرجة من الخطاب العقلي العلمي أو العادي، فإن مسألة انطباقها على عالم التجربة لا يثير أي مشكلة.

إن المنظور قد تغير تماما في المنطق المعاصر مع إنشاء أنساق مصورنة، فمن جهة وبالفعل فإن إدخال رموز محددة بكل دقة يسمح باستبعاد كل حالة إلى عالم أشياء خارجة عن النسق، ومن جهة أخرى فإن قواعد الاستنتاج التي نضعها هي مصوغة صياغة تجعلها ترجع إلى مجرد تعامل مع الرموز : فليس هناك حاجة إلى اللجوء إلى الحدس الذي يتمثل في توحيد أو تمييز الرموز المستعملة. وأخيرا فإن اختيار الأقوال المسلمة عند المنطلق (البديهيات أو خطاطات الاشتقاق)، بما أنه لم يعد قائما على درجة متراوحة البداهة، فإنه يصبح بسبب هذا أمرا نسبيا واحتماليا. ومن الناحية المبدئية، فإن أي مجموعة من الأقوال يمكن اعتبارها نسقا من البديهيات، والواقع أن هناك مقاييس مختلفة تحكم هذا الاختيار : وبالفعل يجب أن يسمح النسق باستنتاج جميع مبرهنات النظرية التي من أجلها وضع ومن المرغوب فيه أن يفعل ذلك بأقصى ما يمكن من الوضوح ومن البساطة، ومن المفيد جدا

أن يصلح لصورنة نظريات أخرى غير التي وقع اتخاذها «نموذجا له»[1]. وفوق ذلك كله ينبغي أن يكون نسقا «غير متناقض» بمعنى أن لا يكون من الممكن أن نبرهن فيه قضية من القضايا ونفي هذه القضية في آن واحد.

والمباحث «النظرية الشارحة» إنما هي مخصصة للنظر في هذه المشاكل وفي أخرى مثلها، ومن وجهة النظر المنطقية التي هي وجهة نظرنا في هذا الكتاب فإننا سنقتصر على الإشارة كخاتمة إلى الطريقة التي حلت بها بعض هذه المشاكل، ولا سيما التي يتعلق منها ببعض خصائص منطق القضايا ومنطق المحمولات.

1- الترابط او عدم التناقض

إن النسق الذي يمكن فيه أن نبرهن كل الصيغ المبنية وفقا للقواعد لا يمكن أن يصلح لأي شيء إذ يمكن أن يثبت فيه أي شيء فيكون «غير مترابط» (أو «غير متماسك»). وبالتالي إذا وجد في مجموع الصيغ الممكنة بعض منها لا تمكن برهنته. فإننا نقول إن النسق «مترابط» (أو «متماسك»). ولهذا لا توجد أي طريقة تسمح لنا بأن نبرهن في منطق القضايا الصيغ «ق»، «ق⊃ل»، «قVل»....، وفي منطق المحمولات «Uسّ أس»، Eسّ(أس⊃ ب س)، «Eسّ Uصّ ع س ص».....

إن النسق عندما يحتوي على عملية النفي[2] و[مقولة] «من الكذب يلزم كل شيء» ex falso sequitur quodlibet ». فإن مفهوم «الترابط» يترك محله لمفهوم «عدم التناقض» non-contradiction الذي عندئذ يكون مكافئا له. وبالفعل فإن النسق من هذا القبيل يكون متناقضا، أي إذا أمكننا أن نبرهن فيه في آن واحد صيغة من الصيغ ونفيها، فإنه يمكننا أن نبرهن فيه كل الصيغ تماما :فيكون «غير مترابط» incohérent.

---

(1) « النموذج» هو كل نظرية يمكن أن تطابق موضوعات النسق بحيث تطابق صيغ النسق أقوال النظرية، وتطابق الصيغ الممكن اشتقاقها أقوالا صادقة من النظرية.وأحد «نماذج» النسق هو بطبيعة الحال النظرية التي منها ومن أجلها وقع بناء النسق. وكل تأويلات النسق الممكنة هي «نماذج» له.

(2) لقد بنيت أنساق دون نفي: مثل « منطق الاستلزام الخاص» الذي لا يقبل إلا عامل الاستلزام، و «المنطق المطلق» logique absolue الذي إلى جانب الاستلزام يقبل العطف والفصل.

2- البتية ومشكلة البت

يكون النسق قابلا للبت في شأنه (ويقال أيضا قابلا للحل) إن وجدت «طريقة فعلية» أي يمكن تحقيقها بعدد محدود من المراحل تسمح لنا بأن نبين بالنسبة إلى كل صيغة من صيغ النسق إن كانت برهنتها ممكنة أو غير ممكنة، ومشكلة العثور على مثل هذه الطريقة تسمى «مشكلة البت».

3- الاستقلال - التشبع

إن هاتين الخاصيتين ولو لم تكن لها الأهمية التي للخاصيتين السابقتين إلا أنهما مطلوبتان أيضا في بناء النسق الصوري.

فيقال إن النسق متكون من بديهيات «مستقلة» إن لم يكن أي منها قابلة لأن تبرهن ابتداء من جملة البديهيات الأخرى.لقد رأينا[1] أن نسق البديهيات الخمس الذي وضعه (وايتهد) و(راسل) قد رده (هلبرت) إلى أربع، لأن إحداها أمكن برهنتها ابتداء من الأخريات.

ويكون النسق «متشبعا» إن جعلناه متناقضا عندما نضيف إلى البديهيات صيغة لا يمكن برهنتها داخل النسق.والمقصود هنا التشبع التركيبياتي saturation syntaxique أي المتعلق بالنسق ذاته.وإذا نظرنا إليه من الزاوية الدلالية sémantique أي إذا نظرنا إليه من جهة تأويلاته قلنا إنه «متشبع» إن هو سمح ببرهنة جميع الصيغ المطابقة لمبرهنات «النموذج» المعني.

4- النظرية الشارحة لمنطق القضايا

إن منطق القضايا نسق صورانيته بسيطة نسبيا تكمن السيطرة عليه تماما بالدراسة النظرية الشارحة.لذلك فإن له بعض الخصائص التي لا يملكها بنفس الدرجة منطق المحمولات من الدرجة الأولى ولا منطق المحمولات من الدرجة العليا بوجه خاص. فهو بالفعل «متشبع» من وجهة النظر التركيبياتية والدلالية معا فهو «غير متناقض» و«يمكن البت فيه».

---

(1) راجع الباب III، 2، § II.

ومن السهل التأكد من طابعه «غير المتناقض» و «القابل للبت» باللجوء إلى طريقة الدوال الصدقية. فإذا كانت «ق» صيغة قيمة صدقها لا تتضمن إلا الحالات «1» فإن قيمة صدق «~ق» لن تتضمن إلا حالات «0». فالصيغة الأولى تمثل «قانونا منطقيا» أي صيغة مقبولة دائما في النسق وتمثل الثانية «تناقضا» وبالتالي صيغة غير مقبولة بتاتا وعندئذ لا يمكننا أن نبرهن في آن واحد في النسق الصيغة «ق» ونفيها «~ ق».

إن طريقة التقدير بطريقة الدوال الصدقية التي هي من الناحية النظرية على الأقل ممكنة دائما تمثل بالنسبة إلى منطق القضايا «طريقة أولى للبت». وهناك طرق أخرى كثيرة ولا سيما طريقة «الرد» إلى «الصورة العادية العطفية». التي توجز أهم مراحلها.

فالعبارة الموضوعة في «الصورة العادية العطفية» تتمثل في صورة سلسلة من العطف حججها حالات فصل هي بدورها يجب أن تكون حججها متغيرات بسيطة أو معمولة لعامل النفي :فالعبارة «قVل. ٨ م V ن V ق. ٨ ل V ~ل» تكتسي بهذا، الصورة العادية العطفية. و مراحل طريقة الرد ممكنة التحقيق دائما وهي تؤول إلى المراحل التالية :

(أ) نبدأ بأن نحذف من الصيغة الاستلزامات والتكافؤات التي تحتوي عليها وذلك بتطبيق التعريفات الخاصة بالتكافؤ والاستلزام (الباب II، § II، 2).

(ب) ثم نحذف حالات النفي الواقعة على العبارات المركبة عند وجود هذه الحالات، وذلك باستعمال قانون الثنائية أو (مرغن) (الباب II، § III، 2) وبذلك نحصل على صيغة لا تحتوي إلا على عاملي العطف والفصل ولا ينصب فيها النفي إلا على متغيرات بسيطة.

(ج) وفي الأخير نرد هذه الصيغة إلى «صورتها العادية العطفية» وذلك بأن نطبق قانوني التوزيع في العطف أو في الفصل العدد اللازم من المرات (الباب 2 ،III § ،II).

(د) وبمجرد النظر في العبارة في صورتها العادية يسمح عندئذ بأن نقول إن كنا أو لسنا أمام صيغة ممكنة البرهنة.

تطبيق الطريقة على مثال:

نفترض أن علينا أن «نبت» فيما إن كانت الصيغة التالية: «((ق∧ل⊂م)» ∧.∼م.∧ ق) ⊂ ∼ل» تمكن برهنتها أو لا تمكن:

1- «∼(∼(ق ∧ ل)V م. «∧∼م ∧ق) V ∼ل. عن طريق التعريف (1) وتطبيقه أولاً على الاستلزام بصفته حجة، ثم على الاستلزام الرئيسي.

2-«((ق∧ل.∧ ∼م.V.م.V .∼ق)) V ∼ل.عن طريق قانوني الثنائية[1]

3-«(قVم.V ∼ق.∧ل V مV ∼ق.∧∼مVم.V ∼ق)V∼ل.عن طريق توزيعية «V» الأولين[2]

4-«(قVمV ∼قV∼ل.∧.ل V مV ∼قV∼ل∧∼مV ∼قVل».عن طريق توزيع «V» الأخير.

5- نلاحظ أن كلا من الحجج الثلاث للعطف أعلاه تحتوي على متغير ونفيه ذاته: ففي الحجة الأولى لدينا «ق V∼ق» وفي الثانية «لV∼ل» وفي الثالثة « مV ∼م» وهي عبارات تقديرها بواسطة الجداول الصدقية لا يضم إلا حالات «1»[3] وبالتالي فإن مختلف حجج العطف لها دائما القيم «1» أيا كانت من جهة أخرى المتغيرات الأخرى الواردة فيه.

(راجع جدول «الفصل».الباب II، § 1، 2) وكذلك الأمر حتى مع العطف. وعندئذ تكون لدينا صيغة صالحة بالنسبة إلى النسق.

5- النظرية الشارحة لمنطق المحمولات:

ومع منطق المحمولات تصبح المشاكل النظرية الشارحة أكثر تركيبا وحلولها أكثر صعوبة.غير أن أهميتها إنما تظهر في هذا المستوى، لأنه، من أجل صورنة مجموع الرياضيات،

(1) راجع الباب II § III، 2.

(2) راجع الباب 2 II §III.

(3) إن هذه العبارات المختلفة تناظر كل واحدة منها قانون الثالث المرفوع.

فإنه يجب أن يتوفر لدينا منطق المحمولات المعممة مثلما أشرنا إلى ذلك[1] - أو نسق من نفس القوة. لكن البحوث التي أجريت لبيان خصائص الصورانية القوية بالقدر الكافي لاحتواء كل أو بعض الرياضيات القائمة، قد أدت إلى نتائج غير منتظرة لم تكن عديمة التأثير في مجرى البحوث الصورية ذاتها. وحتى إذا ما اقتصرنا على منطق المحمولات من « المرتبة الأولى» فإن المشاكل النظرية الشارحة الرئيسية لم تحل حلا إيجابيا. وبالفعل إذا كنا استطعنا أن نبرهن طابعه «غير المتناقض» فإن البتية décidabilité لم تثبت إلا لمنطق المحمولات «المطلقة» ولبعض الأصناف من عبارات منطق «العلاقات» دون جملة العبارات التابعة لهذا الأخير.

إن الطابع «غير المتناقض» في منطق المحمولات من المرتبة الأولى قد وقعت برهنته بكيفيات مختلفة. وتتمثل إحداها في التنظير بسبب كل صيغة من منطق المحمولات والصيغة «المشاركة» لها في منطق القضايا[2] . وبالفعل إن كانت إحدى صيغ منطق المحمولات ممكنة البرهنة فإن في منطق القضايا صيغة «مشاركة» associée تناظرها والعكس بالعكس، إن لم تكن في منطق القضايا صيغة ممكنة البرهنة، فإن مشاركتها لا تكون ممكنة البرهنة في منطق المحمولات.

عندئذ إذا كانت « قي أ» صيغة ممكنة البرهنة في منطق المحمولات، فإن مشاركتها «قي» تكون أيضا ممكنة البرهنة في منطق القضايا، لكان في هذه الحالة لا تكون العبارة، «~قي» ممكنة البرهنة. لأن منطق القضايا غير متناقض وبالتالي فإن العبارة «~قي» تكون غير متناقضة أيضا فلا يمكننا أن نبرهن في آن واحد، الصيغة «قي أ» ونفيها «~قي» ويلزم من هذا أن منطق المحمولات غير متناقض.

وأما بالنسبة إلى مشكلة البت التي لا يمكن حلها بشكل عام إلا في منطق المحمولات «المطلقة» فإنه يمكننا أن نطبق الرد إلى الصورة العطفية العادية وذلك باعتبار العبارات القضوية المسورة تسويرا كليا حالات عطف لعدد غير معين من الحدود والعبارات المسورة

---

(1) راجع الباب 5 ، II § VI

(2) بالنسبة إلى المعنى الذي ينبغي أن نعطيه عبارة المشاركة راجع الباب 4 .I § III.

تسويرا جزئيا حالات فصل من نفس النوع وهذا ما يسمح لنا بأن ننقل عبارات مسورة إلى عبارات لا يذكر فيها إلا قضايا شخصية مقيدة بالعوامل القضوية العادية. إن مثل هذه العبارات يمكن أن تعالج بالطريقة المشار إليها في الفقرة السابقة.

فإذا انتقلنا من منطق المحمولات من «المرتبة الأولى» إلى منطق المحمولات من «المرتبة العليا»، فإن الوضع يختلف اختلافا كبيرا. وكل المحاولات التي وقعت لبرهنة الطابع غير المتناقض بأساليب صارمة لمنطق المحمولات من مرتبة عليا أو لنسق جد قوي لصورنة الرياضيات؛ إن كل هذه المحاولات قد أخفقت. وكان على (غودل) Gödel أن يفسر هذا الإخفاق في مذكرة شهيرة ظهرت سنة 1931 [1] حيث برهن النظريتين théorèmes التاليتين اللتين لزمنا أن نترجمها إلى اللغة العادية لعدم إمكان التعبير عنهما في صورتهما التقنية.

1 – إذا كان نسق غير متناقض قويا بالقدر الكافي لصورنة علم الحساب التكراري[2] arithmétique récursive فإن فيه بالضرورة أقوالا «لا يمكن البت فيها» indécidables، أي لا يمكن أن نقول عنها إن كان يمكن أو لا يمكن برهنتها في صورانية النسق.

إذا كان نسق من الأنساق قويا بالقدر الكافي لصورنة علم الحساب فإنه لا يمكن برهنة عدم تناقضه بموارد هذا النسق وحدها بل يجب اللجوء إلى أساليب من البرهنة خارجة عنه.

2 – إن هاتين النظريتين وغيرهما من أمثالها التي وضعت فيما بعد [3] كان لهما وقع كبير من الناحية المنطقية الرياضية. وبالفعل فإن الصورانية قد وضعت لنفسها حدودها عندما بينت، بالفعل وبطريقة تستغربها العقول المتعودة على البرهنات الدقيقة، أنه لا يمكن

(1) إن هذا النقل الذي هو ممكن دائما ليست صعوباته قليلة عندما يتعلق الأمر بعبارات تحتوي على عدة أسوار مختلفة.

(2) Cf.Uber Formal Unentscheidbare Sätze Der Principia Mathemedica Und Verwander Systeme 1 ;Monat Schefte Fur Mathematik Und Physik . 1931.P173-198.

(3) Cf.J.Ladriere ;Les Limitations Internes Des Formalismes,Paris-Louvain,1957.

أن نبني نسقا منطقيا تكون قوته كافية لصورنة علم الحساب، ويكون في نفس الوقت غير متناقض ويمكن البت فيه.

لقد أصبح منذ الآن من الثابت وبدون منازع أن كل صورانية formalisme عندما تكتسب شيئا من القوة، فإنها تتوصل إلى طرح مشاكل طرحا صحيحا، مثل: مشكلة عدم تناقضها أو مشكلة إمكان البت فيها اللتين لا يمكن أن تقدم لهما أي حل: و«ما يمكن التفكير فيه» pensable بلغة الصورانية لا يتطابق دائما مع «يمكن تبريره» justifiable.

وهل ينبغي منذ الآن أن نتحدث عن إخفاق الطرائق المصورنة ؟ لا ريب في أنه يجب الاعتراف بأن «محدودية» الصورانية تقضي نهائيا على مطامح (ليبنتيس) إلى حل جميع المشاكل ولو كانت فلسفية، بمجرد الحساب.لكنها لا تتمثل بذلك إخفاقا للصورانية : بل هي لا تزيد على تحديد المجال الذي تعمل داخله الصورانية بفعالية، وهذا المجال على الصعيد الموضوعي لبناء الأنساق، هو مجال غير محدود. إن صح القول، بمعنى أنه يمكن دائما أن نتخيل أنساقا جديدة أدق وأقوى أو أعم وقابلة للتوسيع بشكل غير محدود.

غير أنه إذا كان يمكن الصورانية،بعد تكونها، أن تتنامى على صعيدها الخاص، فإنه ليس يمكنها أبدا وحدها أن تتجاوز نفسها، ولا أن تكون واضحة تماما لدى نفسها. فعندما تصبح غير مكتفية بنفسها فإنه يجب على الفكر أن يقوم بمبادرة جديدة لوضع صورانية أنسب.وعندما تحاول أن تتدارك نفسها بالتفكير فإنها تجد نفسها مأخوذة في نوع من الانتهاك غير المحدود لحدودها يجبرها على الرجوع إلى مصدر من البداهة يتجاوز الصورانية، ولا يمكن أن يكون إلا الحدس الذي هو منبع وضمان كل حقيقة. «إن كون الصورنة تلتفت دائما إلى غيرها rétrospective فإن هذا يثبت أنها ليست تامة إلا في الظاهر وأن التفكير الصوري يعيش من التفكير الحدسي»[1].

(1) M.MERLEAU-PONTY. Phénoménologie de la perception, 3 éd.Paris1945,p.442.

BIBLIOGRAPHIE

LOGIQUE ANCIENNE ET TRADITIONNELLE

Aristote, Organon, tard. Tricot, Vrin, 1936. Spécialement Premiers Analytiques.

I.M. BOCHENSKI, Acien formal logic, Amsterdam, 1951.

J. Maritain, Petite logique, Vrin, 1966.

J. Lukasieicz, Aristotle's syllogistic from the Standpoint of Modern Logic, Oxford, Clarendon Press, 1951.

Mme VIRIEUX-REYMOND, La logique et l'épistémologie des Stoïciens, Lausanne, 1949.

K. Mates, Stoïc Logic, Berkeley et Los Angeles, 1953.

LOGIQUE CONTEMPORAINE

R. P. Dubarle, Initiation à la logique, Gauthier-Villars, 1957.

R. Blanché, Introduction à la logique contemporaine, A. Colin, 1957.

J. Dopp, Notions de logique formelle, Nauwelaerts, 1965.

A. Tarski, Introduction à la logique (trad. De l'anglais), Gauthier-Villars, 1960.

A. N. Prior, Formal logic, Oxford, Clarendon Press, 2e éd. 1962.

J. Th. Clark, Conventionnal logic and Modern logic, oodstock College Press, 1952.

G. Gentzen, Recherches sur la déduction logique (trad. De l'allemand), Presses Universitaires de France, 1955.

HISTOIRE GENERALE DE LA LOGIQUE

H. Scholz, Geschichte des Logik, Berlin, 1931.

I. M, Bochenski, Formale Logic, Fribourg-Munich, 1956.

«فهرس المحتويات»